

1	الصفحة	امتحان تجريبي موحد 2004	ثانوية مولاي يوسف الرباط
3			
4 ساعات	مدة الإنجاز	المادة : الرياضيات الشعبة : العلوم الرياضية (أ) و (ب)	
10	المعامل		

التمرين رقم 1: يحتوي كيس على أربع كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء . نعتبر التجربة التالية : نرمي قطعة نقدية غير مغشوشة. إذا سقطت على وجهها نضيف كرة بيضاء إلى الكيس ثم نسحب منه ثلاث كرات تانيا ، وإذا سقطت على ظهرها نضيف كرة سوداء إلى الكيس ثم نسحب منه ثلاث كرات تانيا.

1- نضع E_0 الحدث <لا توجد أي كرة بيضاء من بين الكرات المسحوبة>

و B الحدث <القطعة النقدية سقطت على وجهها>

أ- حدد: $P(E_0 \cap B)$ و $P(E_0 \cap \bar{B})$ ثم استنتج $P(E_0)$.

ب- سحبنا ثلاث كرات من الكيس ولاحظنا أنه لا توجد أية كرة بيضاء من بين الكرات الثلاث المسحوبة. ماهو الاحتمال أن تكون القطعة سقطت على ظهرها ؟

2- ليكن E_1 الحدث << سحب كرة بيضاء واحدة بالضبط >>

أ- أحسب $p(E_1)$

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$ مع $n \geq 2$. نعيد التجربة السابقة n مرة مع إعادة الكيس إلى تركيبته الأولى بعد نهاية كل تجربة. أحسب p_n احتمال تحقق الحدث E_1 مرة واحدة على الأقل خلال n التجربة ثم حدد

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$$

التمرين رقم 2: في المجموعة C نعتبر قانون تركيب داخلي * المعرف كما يلي :

$$(\forall (z = x + iy) \in C, \forall (z' = x' + iy') \in C), z * z' = xx' + i(xy' + yx')$$

1- أ- أثبت أن * تبادلي وتجميعي

ب- أثبت أن * يقبل عنصرا محايدا

ج- هل $(C, *)$ زمرة ؟

2- نضع $G = \{z \in C / \operatorname{Re}(z) \neq 0\}$ بين أن $(G, *)$ زمرة تبادلية

3- نضع $H = \{z = x + iy \in C / x > 0, y = x \ln(x)\}$

أ- بين أن $(H, *)$ زمرة جزئية من $(G, *)$

ب- أنشئ صورة H في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد وممنظم (O, \bar{u}, \bar{v})

4- ليكن $z = x + iy$ مع $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. نعرف المتتالية $z^{(p)}$ حيث $p \in \mathbb{N}^*$ كمايلي :

$$z^{(p+1)} = z^{(p)} * z, \quad z^{(1)} = z$$

أ- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*), z^{(n)} = x^n + nx^{n-1}yi$

ب- نضع $z = j$ و $S_n = 1 + j + j^{(2)} + \dots + j^{(n)}$ مع $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

أحسب S_n ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(S_n)$

التمرين رقم 3 : I- المستوى P منسوب إلى معلم متعامد وممنظم مباشر (o, \vec{u}, \vec{v})

لتكن Ω النقطة ذات لحوق i و m عدد حقيقي موجب قطعاً

نعتبر التطبيق $F_m : P/\{\Omega\} \rightarrow P$

$$z \rightarrow z' = \frac{m}{z+i} + i$$

1- بين أن $(\forall M \in P/\{\Omega\}) F_m(M) \neq \Omega$

2- بين أن $(\forall M \in P/\{\Omega\}), (F_m \circ F_m)(M) = M$

3- حدد المجموعة $A = \{M \in P/\{\Omega\} / F_m(M) = M\}$

4- لتكن $M \in P/\{\Omega\}$ نضع $F_m(M) = M'$ بين أن

أ- النقط Ω, M, M' مستقيمة

$$\overline{\Omega M} \cdot \overline{\Omega M'} = m$$

5- ليكن $r \in IR_+^*$ و (Γ) الدائرة التي مركزها Ω وشعاعها r بين أن $F_m(\Gamma)$ دائرة حدد

مركزها وشعاعها.

II- لتكن A, B, C, D أربع نقط مختلفة مثنى مثنى من $P/\{\Omega\}$ ألحاقها على التوالي a, b, c, d نضع

$$(A, B, C, D) = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$$

1- بين أن $(A, B, C, D) = (C, D, A, B)$

2- بين أن (A, B, C, D) عدد حقيقي إذا فقط إذا كان A, B, C, D مستقيمة أو متداورة

3- نضع $F_m(A) = A'$ و $F_m(B) = B'$ و $F_m(C) = C'$ و $F_m(D) = D'$ بين أن

$$(A', B', C', D') = (A, B, C, D)$$

4- بين أن A', B', C', D' متداورة أو مستقيمة

التمرين رقم 4 :

I- ليكن I وسيطاً حقيقياً نعتبر الدالة العددية f_I المعرفة على R_+^* بما يلي : $f_I(x) = \frac{\ln x + I}{x^2 + 1}$

و (C_I) منحناها في معلم متعامد وممنظم (o, \vec{i}, \vec{j})

1- أ- لتكن $M(a, b)$ نقطة من المستوى بحيث $a > 0$ بين أنه يوجد منحنى وحيد (C_I) يمر من

$$M(a, b)$$

ب- بين أن f_I قابلة للإشتقاق على R_+^* وأن إشارة $f_I'(x)$ هي إشارة $g_I(x)$ حيث:

$$g_I(x) = x^2 + 1 - 2x^2(\ln(x) + I)$$

ج- أدرس التغيرات الدالة g_I محددات النهايات $\lim_{x \rightarrow 0^+} g_I(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_I(x)$

د- بين أن المعادلة $g_I(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً m_I ثم استنتج إشارة g_I

$$f_I(m_I) = \frac{1}{2m_I^2}$$

و- أحسب نهايات f_I عند محداث $[0, +\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها

2- أ- بين أن $m_0 \in]1, 2[$ و $m_1 \in]4, 5[$ وحدد قيمة m_1

3	الصفحة	المادة : الرياضيات
3		<p>الشعبة : العلوم الرياضية (أ) و (ب)</p> <p>ب- أدرس الوضع النسبي ل (C_1) و (C_1) حيث $(I, I') \in \mathbb{R}^2$</p> <p>3- أنشئ في نفس المعلم المنحنيات (C_1) و (C_{-1}) و (C_0)</p> <p>II - نعتبر الدوال العددية المعرفة كما يلي :</p> $\left\{ \begin{array}{l} F(x) = \int_1^x f_0(t) dt = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt, \dots, x > 0 \\ F(0) = \int_0^1 j(t) dt \end{array} \right. \quad \text{و} \quad \left\{ \begin{array}{l} j(x) = \frac{\text{Arc tan}(x)}{x}, \dots, x > 0 \\ j(0) = 1 \end{array} \right.$ <p>1- أ- بين أن F معرفة على \mathbb{R}^+</p> <p>ب- بين أن F متصلة قابلة للإشتقاق على \mathbb{R}_+^* واحسب $F'(x)$ لكل $x > 0$</p> <p>2- بين أن $F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$ ($\forall x > 0$)</p> <p>3- أ- بين أن $F(x) = (\text{Arc tan } x) \ln(x) - \int_1^x j(t) dt$ ($\forall x > 0$)</p> <p>ب- أستنتج أن F متصلة في الصفر</p> <p>ج- بين أن $F(x) \ln(x) \leq \frac{F(x) - F(0)}{x}$ ($\forall x > 0$) ثم استنتج أن F غير قابلة للإشتقاق في الصفر. أول هندسيا هذه النتيجة</p> <p>4- نضع لكل $k \in \mathbb{N}$ ولكل $x > 0$ $I_k(x) = \int_1^x t^k \ln(t) dt, \dots$</p> <p>أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن</p> $(\forall x > 0)(\forall k \in \mathbb{N}), I_k(x) = \frac{1}{k+1} x^{k+1} \ln(x) - \frac{1}{(k+1)^2} x^{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}$ <p>ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} I_k(x)$ ثم بين أن $\lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^k I_{2k}(x) = \frac{1}{1+x^2}$</p> <p>ج- بين أن $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$ ($\forall x > 0$) ($\forall n \in \mathbb{N}$)</p> <p>د- استنتج أن $F(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) + (-1)^{n+1} \int_1^x \frac{t^{2n+2} \ln(t)}{1+t^2} dt$</p> <p>هـ- استنتج أن $\left F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right \leq I_{2n+2}(x)$</p> <p>5- نضع $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) باستعمال السؤال (4-أ) بين أن</p> $(\forall n \in \mathbb{N}), \left F(0) - u_n \right \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$ <p>ثم حدد قيمة مقربة للعدد $F(0)$ بالدقة 10^{-2}</p>