2004

التمرين رقم3 : I- المستوى P منسوب إلى معلم متعامد وممنظم مباشر $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$

لتكن Ω النقطة ذات لحق i و m عدد حقيقي موجب قطعا

نعتبر التطبيق $F_m : P/\{\Omega\} \to P$

$$z \to z' = \frac{m}{\overline{z}+i} + i$$

1- بين أن $F_m(M) \neq \Omega \qquad (\forall M \in P/\{\Omega\})$

2- بين أن $\left(\forall M \in P/\{\Omega\}\right), (F_m o F_m)(M) = M$

3- حدد المجموعة $A = \left\{M \in P/\{\Omega\} / F_m(M) = M\right\}$

4- لتكن $M \in P/\{\Omega\}$ نضع $F_m(M) = M'$ بين أن

أ-النقط Ω , M و M' مستقيمية

ب- $\overrightarrow{\Omega M}.\overrightarrow{\Omega M'} = m$

5- ليكن $r \in IR_+^*$ و (Γ) الدائرة التي مركزها Ω وشعاعها r بين أن $F_m(\Gamma)$ دائرة حدد مركزها وشعاعها.

II- لتكن A , B, C , D أربع نقط مختلفة مثنى مثنى من $P/\{\Omega\}$ ألحاقها على التوالي d,c,b,a نضع

$$(A,B,C,D) = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$$

1-بين أن $(A,B,C,D) = (C,D,A,B)$

2-بين أن (A,B,C,D) عدد حقيقي إذا وفقط إذا كان D,C,B,A مستقيمية أو متداورة

3-نضع $F_m(A) = A'$ و $F_m(B) = B'$ و $F_m(C) = C'$ و $F_m(D) = D'$ بين أن

$$(A',B',C',D') = \overline{(A,B,C,D)}$$

4-بين أن A ,B, A',B' متداورة أو مستقيمية

التمرين رقم4 :

I – ليكن l وسيطا حقيقا نعتبر الدالة العددية f_l المعرفة على R_*^+ بما يلي : $f_l(x) = \dfrac{\ln x + l}{x^2+1}$

و (C_l) منحناها في معلم متعامد وممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1- أ- لتكن $M(a,b)$ نقطة من المستوى بحيث $a \succ 0$ بين أنه يوجد منحنى وحيد (C_l) يمر من $M(a,b)$

ب- بين أن f_l قابلة للإشتقاق على R_*^+ وأن إشارة $f_l'(x)$ هي إشارة $g_l(x)$ حيث:

$$g_l(x) = x^2 + 1 - 2x^2(\ln(x) + l)$$

ج- أدرس التغيرات الدالة g_l محددا النهايات $\lim_{x\to 0^+} g_l(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g_l(x)$

د- بين أن المعادلة $g_l(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا m_l ثم استنتج إشارة g_l

ه- بين أن $f_l(m_l) = \dfrac{1}{2{m_l}^2}$

و- أحسب نهايات f_l عند محدات $]0,+\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها

2- أ- بين أن $m_0 \in]1,2[$ و $m_1 \in]4,5[$ وحدد قيمة m_1

ب- أدرس الوضع النسبي ل (C_l) و $(C_{l'})$ حيث $(l, l') \in IR^2$

3- أنشئ في نفس المعلم المنحنيات (C_1) و (C_{-1}) و (C_0)

II - نعتبر الدوال العددية المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} j(x) = \dfrac{Arc\tan(x)}{x},,,,, x \succ 0 \\ j(0) = 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} F(x) = \int_1^x f_0(t)dt = \int_1^x \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}dt,,,,,, x \succ 0 \\ F(0) = \int_0^1 j(t)dt \end{cases}$$

1- أ- بين أن F معرفة على IR^+

ب- بين أن F متصلة قابلة للإشتقاق على IR_+^* واحسب $F'(x)$ لكل $x \succ 0$

2- بين أن $(\forall x \succ 0), F\left(\dfrac{1}{x}\right) = F(x)$

3- أ- بين أن $(\forall x \succ 0), F(x) = (Arc\tan x)\ln(x) - \int_1^x j(t)dt$

ب- أستنتج أن F متصلة في الصفر

ج- بين أن $(\forall x \succ 0),,, \dfrac{F(x) - F(0)}{x} \le j(x)\ln(x)$ ثم استنتج أن F غير قابلة للإشتقاق في الصفر. أول هندسيا هده النتيجة

4- نضع لكل $k \in IN$ ولكل $I_k(x) = \int_1^x t^k \ln(t)dt,,,,: x \succ 0$

أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن

$$(\forall x \succ 0)(\forall k \in IN), I_k(x) = \frac{1}{k+1}x^{k+1}\ln(x) - \frac{1}{(k+1)^2}x^{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

ب- أحسب $\lim\limits_{x \to 0^+} I_k(x)$ ثم بين أن $\lim\limits_{x \to 0^+} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$

ج- بين أن $(\forall x \succ 0)(\forall n \in IN) \dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$

د- استنتج أن $(\forall x \succ 0), F(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x) + (-1)^{n+1}\int_1^x \dfrac{t^{2n+2}\ln(t)}{1+t^2}dt$

ه- استنتج أن $(\forall x \in \left]0,1\right[) \left| F(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x) \right| \le I_{2n+2}(x)$

5- نضع $(\forall n \in IN),,, u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ باستعمال السؤال (4- أ)بين أن

$$(\forall n \in IN),,, \left| F(0) - u_n \right| \le \frac{1}{(2n+3)^2}$$

ثم حدد قيمة مقربة للعدد $F(0)$ بالدقة 10^{-2}