

1/2	الصفحة	الامتحان التجريبي لنيل شهادة البكالوريا دورة ماي 2004
4 ساعات	مدة الإنجاز	
10	المعامل	المادة: الرياضيات الشعبة: علوم رياضية المؤسسة: ثانوية جعفر الفاسي الفهري التأهيلية الدارالبيضاء

يسمح باستعمال حاسبة غير قابلة للبرمجة

التمرين 1 (5نقط)

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$

ليكن α عددا من $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

نعتبر في \mathbb{C} المعادلة $(E): z^2 - (1-i)(i + \tan \alpha)z - i(i + \tan \alpha)^2 = 0$

1- أ) حدد بدلالة α حلي المعادلة (E) (نرمز للحلين بـ z_1 و z_2 بحيث $z_1 = iz_2$)

1.50

ب) أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي

1

2- أ) حدد (Γ) مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث $(z - z_1)^2 + z_1$ تخيليا صرفا.

1

ب) في الحالة $\alpha = \frac{\pi}{4}$ حدد العناصر المميزة للمجموعة (Γ) و ارسم (Γ)

1.50

التمرين 2 (5نقط)

نعتبر المجموعة التالية: $E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ ae^a & e^a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{Z} \right\}$ و المصفوفة $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1- أ- بين أن $(E; \times)$ زمرة تبادلية

1

ب- نضع $M_a^0 = I$ و $M_a^1 = M_a$ و $M_a^{n+1} = M_a^n \times M_a$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1

و M_a^{-n} مقلوب M_a^n

بين أن $M_a^p = M_{ap}$ $\forall p \in \mathbb{Z}$

2- a و b عدنان صحيحان طبيعيان

نعتبر المجموعة $H(a; b) = \left\{ M_a^p \times M_b^q / (p; q) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$

أ- بين أن $(H(a; b); \times)$ زمرة جزئية من $(E; \times)$

1

ب- ليكن c من \mathbb{Z}

• بين أن $M_c \in H(a; b) \Leftrightarrow a \wedge b / c$

1

• استنتج أن $H(a; b) = E \Leftrightarrow a \wedge b = 1$

1

التمرين 3 (10نقط)

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan x \leq x \quad \text{بين أن} \quad 0.75$$

$$(\forall t \in \mathbb{R} \quad 1 - t^2 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1 \quad \text{لاحظ أن})$$

2- نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على \mathbb{R} بما يلي:

$$g(x) = \begin{cases} g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & ; x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x}{x} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

أ- بين أن g دالة زوجية 0.50

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad 1 - g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x [1 - f(t)] dt \quad \text{ب- بين أن} \quad 0.75$$

ج- استنتج أن g متصلة على يمين 0 و أن g قابلة للاشتقاق على يمين 0 و $g_d'(0) = 0$ 0.75

$$\forall x \geq 1 \quad 0 \leq \int_1^x f(t) dt \leq \frac{\pi}{2} \ln x \quad \text{أ- بين أن} \quad 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad \text{ب- استنتج أن} \quad 1$$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad x^2 g'(x) = -\int_0^x f(t) dt + \arctan x \quad \text{أ- بين أن} \quad 1$$

$$\forall x > 0 \quad h(x) = x^2 g'(x) \quad \text{ب- نضع} \quad 0.75$$

$$xh'(x) = -\arctan x + \frac{x}{1+x^2} \quad \text{تحقق أن}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad \varphi(x) = -\arctan x + \frac{x}{1+x^2} \quad \text{ج- أدرس منحنى تغيرات الدالة } \varphi \text{ حيث} \quad 0.75$$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad g'(x) < 0 \quad \text{و استنتج أن} \quad 1$$

5- ارسم المنحنى المثل للدالة g 1