

الامتحان التجريبي لنيل شهادة البكالوريا  
دورة ماي 2004

|         |             |
|---------|-------------|
| 1/2     | الصفحة      |
| 4 ساعات | مدة الإنجاز |
| 10      | المعامل     |

المادة: الرياضيات  
الشعبة: علوم رياضية  
المؤسسة: ثانوية البارودي التأهيلية الدار البيضاء

يسمح باستعمال حاسبة غير قابلة للبرمجة

**التمرين 1 (3نقط)**

- نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  المعرفة بـ  $u_n = n \int_1^\pi \frac{\sin x}{x^n} dx$
- 1- باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن  $u_n = \frac{n}{n-1} \left( \sin 1 + \int_1^\pi \frac{\cos x}{x^{n-1}} dx \right)$
- 2- (أ) بين أن  $\left| \int_1^\pi \frac{\cos x}{x^{n-1}} dx \right| \leq \int_1^\pi \frac{1}{x^{n-1}} dx$
- (ب) استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^\pi \frac{\cos x}{x^{n-1}} dx$
- 3- بين أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sin(1)$

**التمرين 2 (3.50نقط)**

- ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا بحيث  $n \geq 2$  و  $A$  و  $B$  نقطتين مختلفتين لحقيهما على التوالي  $z_A$  و  $z_B$ . نعتبر المعادلة  $(E): \forall z \in \mathbb{C} \quad (z - z_A)^2 = (z - z_B)^2$
- 1- (أ) بين أن  $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z - z_A| = |z - z_B|$
- (ب) استنتج أن صور حلول المعادلة  $(E)$  مستقيمة
- 2- (أ) حدد الجذور النونية للعدد العقدي 1
- (ب) استنتج حلول المعادلة  $(E)$
- 3- بين أن حلول المعادلة  $(E)$  تكتب على شكل  $z_k = \frac{z_A + z_B}{2} + i \frac{z_A - z_B}{2} \cot an \left( \frac{k\pi}{n} \right)$  حيث  $k \in \{1; 2; 3; \dots; n-1\}$

**التمرين 3 (9 نقط)**

- نعتبر الدالة  $F$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بما يلي:
- $F(0) = \ln(2)$  ;  $\forall x > 0 \quad F(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$
- 1- بين أن  $\forall x \geq 0 \quad e^x \ln 2 \leq F(x) \leq e^{2x} \ln 2$
- 2- استنتج أن  $F$  متصلة في 0 على اليمين.
- 3- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$  و أول النتيجة هندسيا.
- 4- بين أن  $F$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  وأن  $F'(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{x} \quad \forall x \in ]0; +\infty[$
- 5- نعتبر الدالة  $f$  المعرف على  $]0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$  و  $f(0) = 1$
- (أ) بين أن  $f$  متصلة في 0 على اليمين.
- (ب) أدرس قابلية اشتقاق  $f$  على يمين 0 و أول ذلك هندسيا
- (نقبل أن  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$ )

(ج) بين أن  $f$  تزايدية قطعاً على  $[0; +\infty[$

6- ليكن  $x > 0$  بين أنه يوجد  $c$  من  $]0; x[$  حيث  $f(c).e^c = \frac{F(x) - \ln 2}{x}$

7- استنتج قابلية اشتقاق  $F$  في 0 على اليمين و أول ذلك هندسياً.

8- أنشئ المنحنى  $(C_F)$  في معلم متعام ممتنظم. نأخذ  $F(1) \approx 3$  ;  $\ln 2 \approx 0,7$

### التمرين 3 (4,50 نقطة)

نعتبر المجموعة التالية :  $E = \left\{ M_{(n)} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^n & 2^n \end{pmatrix} / n \in \mathbb{Z} \right\}$

1- نعتبر التطبيق  $f$  المعرف بما يلي :

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow E$$

$$n \rightarrow M_{(n)}$$

(أ) بين أن  $f$  تشاكل تقابلي من  $(\mathbb{Z}; +)$  نحو  $(E; \times)$

(ب) استنتج أن  $(E; \times)$  زمرة تبادلية

2- حدد بدلالة  $n$  و  $p$  المصفوفة  $(M_{(n)})^p$  حيث  $p \in \mathbb{Z}$

3- ليكن  $(a; b) \in \mathbb{Z}^2$  نعتبر  $F = \left\{ M_{(a)}^p \times M_{(b)}^q / (p; q) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$

(أ) بين أن  $(F; \times)$  زمرة جزئية من  $(E; \times)$

(ب) ليكن  $c \in \mathbb{Z}$  بين أن  $a \wedge b$  يقسم  $c$   $M_{(c)} \in F \Leftrightarrow$

(ت) استنتج أن  $E = F \Leftrightarrow a \wedge b = 1$

-----