

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

السلم

التمرين الأول: (2 ن)

نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n(u_n - 1) + 1 \end{cases}$$

(a -1) أثبت أن $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 1$

(b) أثبت أن (u_n) متتالية تزايدية

(a -2) أثبت أن $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n \geq 1$

(b) استنتج أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

(a_n) و (b_n) نعتبر المتتاليتين (a_n) و (b_n) حيث : $a_n = \frac{1}{2^n} \ln(u_n - 1)$ و $b_n = \frac{1}{2^n} \ln(u_n)$

أثبت أن $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متحاديتين (لاحظ أن $b_n - b_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\frac{u_n^2}{u_{n+1}}\right)$)

التمرين الثاني: (2 ن)

1 - ليكن العددين a و b من \mathbb{Z}^* و ليكن p عددا أوليا.

(a) أثبت أن $(p/a \text{ و } p/b) \Rightarrow (p/a^2 + b^2 \text{ و } p/ab)$

(b) استنتج أن : $a \wedge b = 1 \Rightarrow (a^2 + b^2) \wedge ab = 1$

(a - 2) حدد : $1300 \wedge 3600$

(b) حل في $(\mathbb{N}^*)^2$ النظام $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1300 \\ x^2 \vee y^2 = 3600 \end{cases}$

التمرين الثالث: (2 ن)

1- حل في C المعادلة $(E_1): z^3 = \frac{-1+i}{4}$

2- أثبت أنه من بين حلول المعادلة (E_1) يوجد حلا وحيدا ω حيث $\omega^4 \in \mathbb{R}$

3- باستعمال السؤال السابق أثبت أنه إذا كان العددين العقديين λ و μ والعدديين

الحقيقيين a و b يحققان : $\forall z \in C : (z + a + bi)^4 = z^4 + \lambda \cdot z^3 + \mu \cdot z^2 - (1-i) \cdot z - \frac{1}{4}$

فإن $a = b = \frac{1}{2}$ و $\mu = 3i$ و $\lambda = 2 + 2i$

التمرين الرابع : (4.5 ن)

الجزء الأول

لكل x و y من IR نضع $x * y = x + y - 2xy$

0.75

1- أثبت أن $*$ تبادلي و تجميعي و يقبل عنصرا محايدا في IR

1

2- نضع $G = IR - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ أثبت أن $(G, *)$ زمرة تبادلية

0.75

3- نضع $H = \left\{ \frac{1-3^t}{2} / t \in IR \right\}$. أثبت أن $(H, *)$ زمرة جزئية من $(G, *)$

الجزء الثاني

لكل x من G نضع $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & -x & 0 \\ -x & 1-x & 0 \\ -x & x & 1-2x \end{pmatrix}$:

0.5

ونعتبر $E = \{A(x) \in M_3(IR) / x \in G\}$

0.25

1- (a) أثبت أن لكل $x \in G$ و $y \in G$: $A(x) \times A(y) = A(x*y)$

(b) استنتج أن E جزء مستقر من $(M_3(IR), \times)$

2- نعتبر التطبيق $\varphi : \begin{matrix} G \longrightarrow E \\ x \longrightarrow A(x) \end{matrix}$

0.5

(a) أثبت أن φ تشاكل تقابلي من $(G, *)$ نحو (E, \times)

0.25

(b) استنتج بنية (E, \times)

0.5

(c) حدد مقلوب المصفوفة $A(x)$

التمرين الخامس : (2.25 ن)

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ لكل $m \in IR$ نعتبر المنحنى

0.75

$(C_m) : x^2 + m y^2 - m^2 = 0$ و لتكن E مجموعة المنحنيات (C_m)

0.5

1- حدد حسب قيم البارامتر m طبيعة المنحنى (C_m) .

2- أنشئ في نفس المعلم (C_{-1}) و (C_4)

3- ليكن (Γ) المخروطي الذي بؤرته $F(\sqrt{2}, 0)$ ودليله $x = 2\sqrt{2}$: (D)

وتباعده المركزي $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$

0.5

(a) حدد معادلة ديكارتية للمخروطي (Γ) واستنتج البؤرة الثانية F' والدليل (D') المرتبط بها

0.5

(b) تحقق أن المنحنى (Γ) ينتمي إلى المجموعة E .

التمرين السادس : (7.25 ن)

الجزء الأول

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \text{Arc cos} \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right)$.

و ليكن (C_f) منحنائها في معلم متعامد ممنظم

-1 (a) أثبت أن $D_f = \mathbb{R}$

(b) أثبت أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

-2 أثبت أن $\forall \alpha \in [-1, 1] : \arccos(-\alpha) = \pi - \arccos(\alpha)$ و استنتج أن :

$I(0, \frac{\pi}{2})$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)

-3 (a) أثبت أن $\forall x \geq 0 \quad \exists ! \alpha \in]0, \frac{\pi}{4}] : e^{-x} = \tan(\alpha)$

(b) استنتج من ذلك أن $f(x) = 2 \arctan(e^{-x})$ $\forall x \geq 0$

-4 احسب $f'(x)$ من أجل $x \geq 0$

-5 أكتب معادلة المماس T ل (C_f) عند $I(0, \frac{\pi}{2})$ و أنشئ المنحنى (C_f)

الجزء الثاني

نعتبر الدالة F المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{x} \int_x^{2x} f(t) dt, x \neq 0 \\ F(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

-1 (a) أثبت أن $D_F = \mathbb{R}$

(b) أثبت أن $\forall x \in \mathbb{R} : F(-x) = \pi - F(x)$ (يمكن استعمال مكاملة بتغيير المتغير)

-2 (a) أثبت أن $\forall x > 0 : f(2x) \leq F(x) \leq f(x)$

(b) أثبت أن F متصلة على يمين 0

(c) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ و أول هندسيا النتيجة المحصلة

-3 أثبت مستعملا مكاملة بالأجزاء أن : $\forall x > 0 : \int_0^x (x-t) f''(t) dt = f(x) - \frac{\pi}{2} + x$

-4 نقبل أن $\forall t \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq f''(t) \leq 2$

أثبت أن $\forall x \geq 0 : 0 \leq f(x) - \frac{\pi}{2} + x \leq x^2$

-5 (a) باستعمال السؤال 4 أثبت أن : $\forall x > 0 : 0 \leq F(x) - \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}x \leq \frac{7}{3}x^2$

(b) أثبت أن F قابلة للاشتقاق في 0 و أن $F'(0) = \frac{-3}{2}$

0.25

0.5

0.5

0.25

0.5

0.5

0.5

0.25

0.5