بسم الله الرحمن الرحيم

تصحيح الإمتحا ن التجريبي في الرياضيات للسنة الدراسية 2004 -2005 بثانوية مولاى رشيد (نيابة فاس المدينة) .

أنجزه: محمد أيت الحسين
راجعه وصحح أخطاءه: التلميذة: خديجة العمراني
2: باك ع ر أ . (ثا.مولاي رشيد)

موقع الرياضيات بالثانوي: http://arabmaths.site.voila.fr

تمرين01

$f(x)=2e^{-x}-e^{-2x}-x$.

الجزء الأول :

1) $D_f=\mathbb{R}$. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ لأن: $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}e^{-2x}=0$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. يكفي أن نكتب : $f(x)=e^{-x}(2-e^{-x}+\frac{-x}{e^{-x}})$ مع ملاحظة :
$\lim_{x\to-\infty}(\frac{-x}{e^{-x}})=\lim_{X\to+\infty}\frac{X}{e^{X}}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$ بالخصوص العبارة التي ما بين قوسين تؤول إلى $-\infty$.

2) $\forall x\in\mathbb{R}\ f'(x)=-2e^{-x}+2e^{-2x}-1$. ندرس إشارة الحدودية :
$u(t)=2t^2-2t-1$. : جذراها : $a=(1-\sqrt3)/2<0<b=(1+\sqrt3)/2$ بالخصوص $u(t)>0$ على $]-\infty,0]$ وعلى $]b,+\infty[$ و $u(t)<0$ على $]0,b[$. وبما أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ e^{-x}>0$ فإن $f'(x)=0\Leftrightarrow e^{-x}=b\Leftrightarrow x=\ln(1/b)=\ln(\sqrt3-1)$:

و : $f'(x)>0\Leftrightarrow e^{-x}>b\Leftrightarrow x<\ln(\sqrt3-1)$:

و

$f'(x)<0\Leftrightarrow e^{-x}<b\Leftrightarrow x>\ln(\sqrt3-1)$

ومنه جدول التغيرات للدالة f :

x	$-\infty$	$ln(\sqrt{3}-1)$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(ln(\sqrt{3}-1))$	↘ $-\infty$

3) حسب جدول التغيرات للدالة f وبما أن : $f(\ln(\sqrt3-1))>0$ (انظر البرهان أسفله (**)) ، فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين بالضبط α و β
بحيث : $\alpha<\ln(\sqrt3-1)<\beta$.

(**) البرهان على: $f(\ln(\sqrt3-1))>0$:

لدينا :
$$f(\ln(\sqrt3-1))=(\sqrt3/2)-\ln(\sqrt3-1)$$
$$=(\sqrt3-2)-\ln(\sqrt3-1)+2-(\sqrt3/2)$$

نعلم أن : $\forall x>0\ \ln x\le x-1$ (منحنى الدالة $\ln$ مقعر و $y=x-1$ معادلة للمماس في النقطة $A(1,0)$) . إذن:
$(\sqrt3-2)-\ln(\sqrt3-1)\ge0$ وبما أن: $2-(\sqrt3/2)>0$ فإن: $f(\ln(\sqrt3-1))>0$.

لنبرهن الآن على التأطيرات المطلوبة: $\ln(\sqrt3-1)\simeq-0,31$ ومنه :
$$-1/2<\ln(\sqrt3-1)<1/2$$

إذن f تناقصية قطعا على $\left[\frac12,1\right]$ وتزايدية قطعا على $\left[-1,-\frac12\right]$.

** لدينا: $f(-1/2)=2\sqrt e-e+(1/2)=(3/2)-(\sqrt e-1)^2$ ، ومنه :
$$f(-1/2)>0\Leftrightarrow\sqrt{3/2}>\sqrt e-1\Leftrightarrow e<3/2+1+2\sqrt{3/2}$$
وبما أن العبارة في الطرف الأخير صحيحة (لأن $3/2>1$) فإن : $f(-1/2)>0$

** لدينا أيضا : $f(-1)=2e-e^2+1=2-(e-1)^2$ ومنه :
$$f(-1)<0\Leftrightarrow\sqrt2<e-1\Leftrightarrow\sqrt2+1<e$$
وبما أن العبارة في الطرف الأخير صحيحة (لأن $\sqrt2+1<1,5+1<2,5<2.7<e$) فإن: $f(-1)<0$.

نستنتج مما سبق أن : $-1<\alpha<-1/2$

لدينا من جهة أخرى : $f(1)=(2/e)-(1/e^2)-1=-(1-(1/e))^2<0$. و :

$f(1/2)=(2/\sqrt e)-(1/e)+(1/2)>(2/3)-(1/2)+(1/2)=2/3>0$.

إذن : $1/2<\beta<1$.

4) لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}\ f''(x)=2e^{-x}-4e^{-2x}=2e^{-x}(1-2e^{-x})$ ومنه : $f''(x)=0\Leftrightarrow x=\ln 2; f''(x)>0\Leftrightarrow x<\ln 2; f''(x)<0\Leftrightarrow x>\ln 2$ ، نستنتج إذن أن المنحنى C_f يقبل $I(\ln 2, f(\ln 2))$ نقطة انعطاف له ، وأنه مقعر على $[\ln 2,+\infty[$ ومحدب على $]-\infty,\ln 2]$. ملاحظة : $f(\ln 2)=3/4-\ln 2\simeq 0.57$.

الجزء الثاني :

1) أ) $g(x)=2e^{-x}-e^{-2x}$.

لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}\ g'(x)=-2e^{-x}+2e^{-2x}=2e^{-x}(e^{-x}-1)$

مما يعطينا إشارة الدالة g' : لها نفس الإشارة مع : $e^{-x}-1$ ومنه:

$$g'(x)=0\Leftrightarrow e^{-x}-1=0\Leftrightarrow x=0$$

$$g'(x)>0\Leftrightarrow e^{-x}-1>0\Leftrightarrow -x>0\Leftrightarrow x<0$$

$$g'(x)<0\Leftrightarrow x>0$$

المجال $I=\left[\frac{1}{2},1\right]$ يحقق : $I\subset\mathbb{R}_+$. وبما أن الدالة g تناقصية قطعا على $\mathbb{R}_+$ فإنها تناقصية قطعا على I . وبما أن g متصلة على I فإن : $g(I)=[g(1),g(1/2)]$. لدينا : $g(1)=(2/e)-(1/e^2)$ و $g(1/2)=(2/\sqrt{e})-(1/e)$. لنبين أن $g(I)\subset I$ يكفي أن نبين أن :

(1) $1/2<(2/e)-(1/e^2)$ و (2) $(2/\sqrt{e})-(1/e)<1$

لدينا :

$$(1)\Leftrightarrow e^2-4e+2<0\Leftrightarrow(e-2)^2-2<0$$
$$\Leftrightarrow e-2<\sqrt{2}\Leftrightarrow e<2+\sqrt{2}$$

العبارة الأخيرة صحيحة لأن : $2+\sqrt{2}>3>e$. إذن (1) صحيحة.

لدينا:

$$(2)\Leftrightarrow(2/\sqrt{e})-(1/e)<1$$
$$\Leftrightarrow e-2\sqrt{e}+1>0\Leftrightarrow(\sqrt{e}-1)^2>0$$

و كما سبق نستنتج إذن أن : (2) صحيحة.

ملحوظة :

إذا اكتفى التلميذ باستعمال المحسبة يؤخذ جوابه بعين الإعتبار.

ب) $|g'(x)|\le 1/2\Leftrightarrow -1/2\le 2e^{-x}(e^{-x}-1)\le 1/2$

$\Leftrightarrow(-1\le 4u^2-4u\le 1$ و $u=e^{-x})$

نلاحظ أن : $4u^2-4u+1=(2u-1)^2\ge 0$

و أن : $4u^2-4u-1=(2u-1)^2-2\le 0\Leftrightarrow u\le(\sqrt{2}+1)/2$

العبارة الأخيرة صحيحة لكل $x\in I$ لأن: $x\in I\Rightarrow x\le 1\Rightarrow e^{-x}\le 1/e<1$ و أن : $1<(\sqrt{2}+1)/2$ إذن) العبارة : $u\le(\sqrt{2}+1)/2$ صحيحة.).

2) أ) نلاحظ ما يلي:** $u_{n+1}=g(u_n)$ و $((\forall n\in\mathbb{N})\ u_n\in I$ (بالترجع وباستعمال $g(I)\subset I$)

** $\beta\in I$ و $g(\beta)=\beta$.

لدينا : $\forall n\ge 0\ |u_{n+1}-\beta|=|g(u_n)-g(\beta)|$.حسب مبرهنة التزايدات المنتهية وبما أن الدالة g تحقق شروطها فإنه يوجد c ما بين u_n و β بحيث: $g(u_n)-g(\beta)=g'(c)(u_n-\beta)$ و منه :

$$\forall n\ge 0\ |u_{n+1}-\beta|\le|g'(c)||u_n-\beta|\le(1/2)|u_n-\beta|$$

لأن $c\in I$ لأنه محصور ما بين عنصرين من المجال I.

ب) لنبين المتفاوتة المطلوبة بالترجع:**من أجل $n=0$ العبارة تعني : $|(1/2)-\beta|\le 1/2$ وهذا صحيح لأن سعة المجال I هي $1/2$ و β و $1/2$ عنصران من هذا المجال.نفترض الآن أن : $|u_n-\beta|\le(1/2)^{n+1}$ من أجل $n\ge 0$

إذن، و حسب السؤال السابق :

$$.|u_{n+1}-\beta|\le(1/2)|u_n-\beta|\le(1/2).(1/2)^{n+1}=(1/2)^{n+2}$$

بما أن المتتالية الهندسية $((1/2)^n)_n$ متقاربة و تؤول الى 0 .(لأن: $|1/2|<1$) فإن : $\lim_{n\to+\infty}u_n=\beta$.

ج)لدينا:لكي تكون : $|u_n-\beta|\le 0,01$ يكفي حسب ما سبق أن تحقق: $(1/2)^{n+1}\le 0,01$. أي: $-(n+1)\log 2\le -2$ أي : $(n+1)\log 2\ge 2$ أي : $n+1\ge 2/(\log 2)\simeq 6.64$. يكفي إذن أن نأخذ : $n=6$.

الجزء الثالث :

أ) ليكن x عددا حقيقيا بحيث : $h(x)=x$.بالخصوص الدالة h معرفة في x

ومنه : $x<0$ لأن الدالة h معرفة فقط على $\mathbb{R}_-$. ولدينا:

$$h(x)=x \Leftrightarrow -2x=\ln(2e^{-x}-x) \Leftrightarrow e^{-2x}=2e^{-x}-x \Leftrightarrow f(x)=0$$

عكسيا إذا كان $f(x)=0$ و $x<0$ فإنالدالة h معرفة في x و حسب التكافؤ أعلاه فإن : $h(x)=x$.

ب)لندرس تغيرات الدالة h: $\forall x\le 0\ \ h'(x)=\dfrac{2e^{-x}+1}{2(2e^{-x}-x)}$ ومنه $\forall x\le 0\ \ h'(x)>0$. إذن h تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_-$. وبما أنها متصلة فإن : $h(J)=\left[h(-1),h(-1/2)\right]$. من المتفاوتتين : $f(-1)<0$ و $f(-1/2)>0$ المبرهن عليهما في السؤال 3) من الجزء الأول نستنتج على التوالي المتفاوتتين :

$-1<h(-1)$ و $h(-1/2)<-1/2$.

ومنه : $h(J)\subset J$. وبما أن $v_0\in J$:فإن : $\forall n\in\mathbb{N}\ v_n\in J$ (بالترجع)

**رتابة المتتالية

سنبين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ P\ \ (n): v_n\le v_{n+1}$

لدينا $P\ \ (0)$ لأن $v_0\in J$ إذن : $v_1=h(v_0)\in h(J)\subset J$ بالخصوص $-1\le v_1$ أي: $v_0\le v_1$.

و بما أن الدالة h تزايدية على J فإن :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ P\ \ (n)\Rightarrow v_n\le v_{n+1}\Rightarrow h(v_n)\le h(v_{n+1})\Rightarrow v_{n+1}\le v_{n+2}\Rightarrow P\ \ (n+1)$$

إذن $(v_n)_n$ تزايدية..

$(v_n)_n$ مكبورة ب α : لنبين بالترجع أن : n من $\mathbb{N}$ لديتا: $v_n\le\alpha$.لدينا : $v_0=-1\le\alpha$ لأن: $\alpha\in J$.

نفترض انه من اجل n من $\mathbb{N}$ لدينا: $v_n\le\alpha$. إذن وبما ان h تزايدية على J فإن : $h(v_n)\le h(\alpha)$ أي: $v_{n+1}\le\alpha$ ومنه $(v_n)_n$ مكبورة ب α .

$(v_n)_n$ مكبورة و تزايدية إذن $(v_n)_n$ متقاربة. وبما أن h متصلة على J و $h(J)\subset J$ و $v_0\in J$ فإن نهاية المتتالية $(v_n)_n$ حل للمعادلة $h(x)=x$ $x\in J$. إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\alpha$ لأن α هو الحل الوحيد لهذه المعادلة.

ملاحظة:يمكن البرهان على $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\alpha$ بالطريقة المستعملة في الجزء الثاني وهنا سنحتاج إلى النتيجة المقبولة....

***البرهان على $(\forall x\in J)\ |h'(x)|\le\dfrac{3}{5}$.

سبق أن وجدنا: $\forall x\le 0\ \ h'(x)=\dfrac{2e^{-x}+1}{2(2e^{-x}-x)}$ ولاحظنا أن: $\forall x\le 0\ \ h'(x)>0$. ومنه $|h'(x)|=h'(x)=\dfrac{2e^{-x}+1}{2(2e^{-x}-x)}$. ومنه:

$$\frac{3}{5}-|h'(x)|=\frac{3}{5}-\frac{2e^{-x}+1}{2(2e^{-x}-x)}=\frac{2e^{-x}-6x-5}{10(2e^{-x}-x)}$$

له نفس الإشارة مع $u(x)=2e^{-x}-6x-5$.

$\forall x\le 0\ u'(x)=-2e^{-x}-6<0$ ومنه u تناقصية قطعا على J .بالخصوص:

$$(\forall x\in J)\ \ u(x)\ge u(-1/2)=2\sqrt{e}+3-5=2(\sqrt{e}-1)>0$$

ومنه النتيجة.

الجزء الرابع :

1)بجوار $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x=0$ ومنه المستقيم ذو المعادلة: $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى بجوار $+\infty$

بجوار $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{e^{-x}}{-x}\right)-1=+\infty$ (لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{t}}{t}=+\infty$)

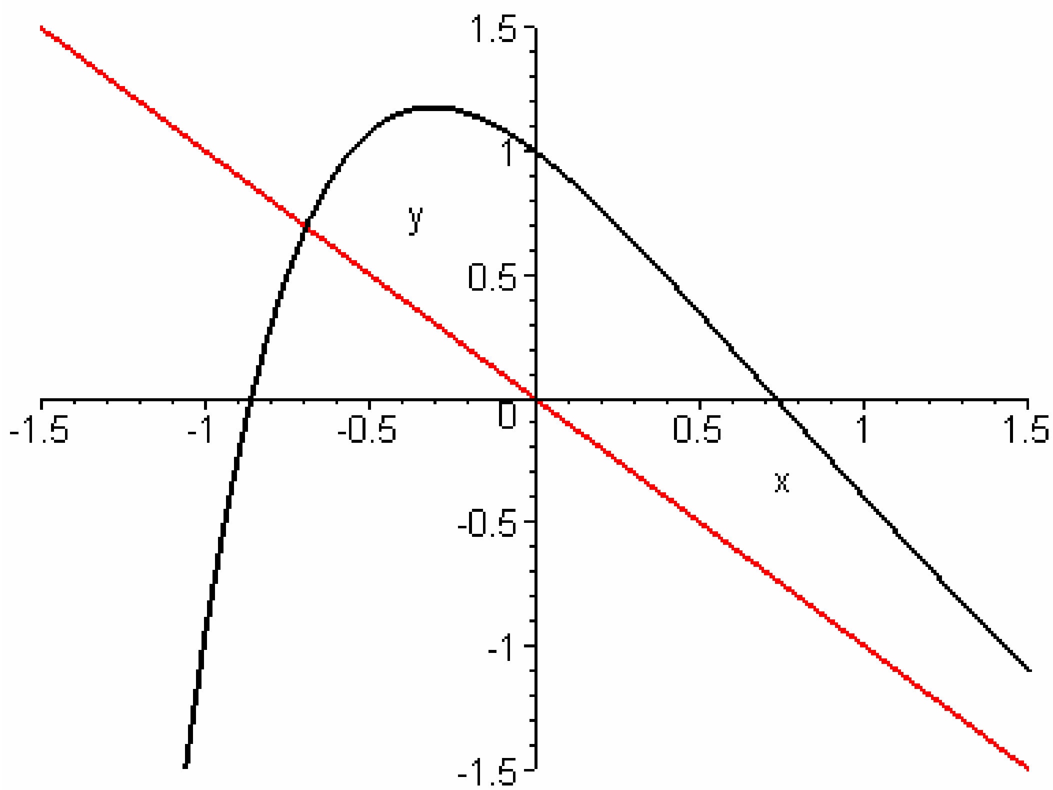
ومنه المنحنى يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $-\infty$.

**الأوضاع النسبية المطلوبة:

لدينا : $(\forall x\in\mathbb{R})\ \ f(x)+x=e^{-x}(2-e^{-x})$

ومنه: $\begin{cases} f(x)+x=0\Leftrightarrow x=-\ln 2\\ f(x)+x>0\Leftrightarrow x>-\ln 2\\ f(x)+x<0\Leftrightarrow x<-\ln 2\end{cases}(\forall x\in\mathbb{R})$ ومنه C يوجد فوق (D) على $]-\ln 2,+\infty[$ وتحت (D) على $]-\infty,-\ln 2[$ ويتقاطعان في النقطة $A(-\ln 2,\ln 2)$.

**إنشاء المنحنى والمستقيم المقارب له: انظر الشكل أسفله.



2) المساحة المطلوبة هي :

$$S=\int_{-1}^{1}|f(x)|dx=\int_{-1}^{\alpha}-f(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx-\int_{\beta}^{1}f(x)dx=$$

$$S=\left[2e^{-x}-(1/2)e^{-2x}+(x^2/2)\right]_{-1}^{\alpha}+\left[-2e^{-x}+(1/2)e^{-2x}-(x^2/2)\right]_{\alpha}^{\beta}$$
$$+\left[2e^{-x}-(1/2)e^{-2x}+(x^2/2)\right]_{\beta}^{1}$$

أي أن : $S=2e^{-\alpha}-2e^{-\beta}+\alpha^2+\alpha-\beta^2-\beta+\dfrac{e^4-4e^3+4e-1}{2e^2}$ (أخذنا بعين الإعتبار أن α و β حلان للمعادلة $f(x)=0$ وعوضنا e^{-2x} ب: $2e^{-x}-x$ لكل x من $\{\alpha,\beta\}$.)

الجزء الخامس:

1) يكفي أن نبين أن الدالة φ متصلة في كل من α و β. لدينا: $\lim_{x\to\alpha-}\varphi(x)=\lim_{x\to\alpha-}e^{3(x-\alpha)}=1=\varphi(\alpha)$ و $\lim_{x\to\alpha+}\varphi(x)=\lim_{x\to\alpha+}1=1=\varphi(\alpha)$. ومنه φ متصلة في النقطة α.

$\lim_{x\to\beta-}\varphi(x)=\lim_{x\to\beta-}1=1=\varphi(\beta)$ و $\lim_{x\to\beta+}\varphi(x)=\lim_{x\to\beta+}e^{\beta-x}=1=\varphi(\beta)$ ومنه φ متصلة في النقطة β.

2) أ) بما أن φ و f متصلتان على $\mathbb{R}$ فإن F معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و : $(\forall x\in\mathbb{R})\ F'(x)=f(x)\varphi(x)$. نلاحظ أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ \varphi(x)>0$. ومنه أن للدالة F' نفس الإشارة مع الدالة f. وحسب دراسة الدالة f نستنتج جدول التغيرات للدالة F :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\searrow$	$F(\alpha)$	$\nearrow$	$F(\beta)=0$	$\searrow$	

ب) لدينا : $F(\beta)=\int_{\beta}^{\beta}f(t)\varphi(t)dt=0$

$F(\beta)=0$

و : $F(\alpha)=\int_{\beta}^{\alpha}f(t)\varphi(t)dt$. وبما أن : $(\forall t\in[\alpha,\beta])\ \varphi(t)=1$ فإن: $F(\alpha)=\int_{\beta}^{\alpha}f(t)dt$. أي أن : $F(\alpha)=\left[-2e^{-x}+(1/2)e^{-2x}-(x^2/2)\right]_{\beta}^{\alpha}$. أي :

$$F(\alpha)=e^{-\beta}-e^{-\alpha}+\frac{(\beta-\alpha)(1+\beta+\alpha)}{2}$$

إشارة $F(x)$ على المجال $[\beta,+\infty[$: حسب جدول التغيرات أعلاه فإن F تناقصية قطعا على المجال $[\beta,+\infty[$ و تحقق : $F(\beta)=0$ و منه $F<0$ على $]\beta,+\infty[$

ج) لدينا لكل $x>\beta$: $F(x)=\int_{\beta}^{x}f(t)e^{\beta-t}dt=\int_{\beta}^{x}(2e^{-t}-e^{-2t}-t)e^{\beta-t}dt=$

ومنه :

$$F(x)=e^{\beta}\int_{\beta}^{x}(2e^{-2t}-e^{-3t}-te^{-t})dt=e^{\beta}\left[-e^{-2t}+\frac{e^{-3t}}{3}\right]_{\beta}^{x}-e^{\beta}\int_{\beta}^{x}te^{-t}dt$$

باستعمال مكاملة بالأجزاء للحد الأخير نجد: $F(x)=e^{\beta}\left[\dfrac{e^{-3t}}{3}-e^{-2t}+te^{-t}+e^{-t}\right]_{\beta}^{x}$ أي :

$$F(x)=e^{\beta}\left(\frac{e^{-3x}}{3}-e^{-2x}+xe^{-x}+e^{-x}\right)-\frac{e^{-2\beta}}{3}+e^{-\beta}-\beta-1$$

و منه :

$$F(x)=e^{\beta}\left(\frac{e^{-3x}}{3}-e^{-2x}+xe^{-x}+e^{-x}\right)-\frac{3+2\beta+2e^{-\beta}}{3}$$

(أخذنا بعين الإعتبار أن : $f(\beta)=0$)

نستنتج إذن أن :

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=-\frac{3+2\beta+2e^{-\beta}}{3}$$

لدينا أيضا :

لكل $x<\alpha$: $F(x)=\int_\beta^x f(t)e^{3(t-\alpha)}dt$ ومنه :

$F(x)=e^{-3\alpha}\int_\beta^x f(t)e^{3t}dt=e^{-3\alpha}\int_\beta^x(2e^{2t}-e^t-te^{3t})dt$. نجد :

$$F(x)=\frac{e^{3x}}{9}+e^{2x}-e^x-\frac{xe^{3x}}{3}-\frac{e^{3\beta}}{9}-e^{2\beta}+e^\beta+\frac{\beta e^{3\beta}}{3}$$

ومنه :

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=-\frac{e^{3\beta}}{9}-e^{2\beta}+e^\beta+\frac{\beta e^{3\beta}}{3}$$

يمكنك إتمام جدول الغيرات بعد إعطاء قيم مقربة للنهايات أعلاه باستعمال الحسبة.

تمرين02

1) لدينا : $r'-r=\frac{a'}{b'}-\frac{a}{b}=\frac{a'b-b'a}{bb'}=\frac{1}{bb'}>0$ و منه : $r<r'$.

وبما أن : $a'b-b'a=1$ فإنه حسب مبرهنة بوزو : $a\wedge b=a'\wedge b'=1$. ومنه (1) شكل مختزل للعددين الجذريين r و r' .

2) لدينا : $r''-r=\frac{a+a'}{b+b'}-\frac{a}{b}=\frac{a'b-ab'}{b(b+b')}=\frac{1}{b(b+b')}>0$

و : $r'-r''=\frac{a'}{b'}-\frac{a+a'}{b+b'}=\frac{a'b-b'a}{b'(b+b')}=\frac{1}{b'(b+b')}>0$ ومنه : $r<r''<r'$.

و لدينا $b(a+a')-a'(b+b')=ba'-a'b=1$ إذن حسب مبرهنة بوزو فإن : $(a+a')\wedge(b+b')=1$ ومنه (2) شكل مختزل للعدد الجذري r'' .

3) أ) حسب الفرضية : $\frac{q'}{n}\le\frac{a'}{b'}<\frac{q'+1}{n}$ و $\frac{q}{n}\le\frac{a}{b}<\frac{q+1}{n}$ (3)

لدينا :

$bq\le na<bq+b$ و $b'q'\le na'<b'q'+b'$ لنضع : $\begin{cases}\rho=na-bq\\ \rho'=na'-b'q'\end{cases}$

واضح أنها تحقق كل الشروط المطلوبة..

ب) لدينا : $q\le n\frac{a}{b}<n\frac{a'}{b'}<n\frac{q'+1}{n}=q'+1$ ومنه : $q<q'$ ومنه : $q\le q'$.

**من: $\begin{cases}na=bq+\rho\\ na'=b'q'+\rho'\end{cases}$ نستخرج: $\begin{cases}b'na=bb'q+\rho b'\\ bna'=bb'q'+\rho'b\end{cases}$ ومنه بإنجاز الفرق :

$bb'(q'-q)=n(ba'-b'a)+\rho b'-\rho'b$ أي: $bb'(q'-q)=n+\rho b'-\rho'b$

لأن : $ba'-b'a=1$.

4) أ) نفترض أن: $b'|na'-b'q'$. لدينا : $b'|b'q'$ إذن: $b'|na'$ وبما أن $b'\wedge a'=1$ ف فإنه ، حسب مبرهنة كوص: $b'|n$ وهذا يتناقض مع المعطيات.

إذن : $b'\nmid na'-b'q'$

نعلم أن : $0\le\rho'<b'$ و بما أن $b'\nmid na'-b'q'=\rho'$ فإن : $\rho'\ne0$ إذن : $1\le\rho'\le b'-1$.

ب) لدينا : $bb'(q'-q)=n+\rho b'-\rho'b$ وبما أن $n<b+b'$ و $\rho'\ge1$ فإن:

$bb'(q'-q)<b+b'+\rho b'-b=b'(1+\rho)$ و بما أن : $\rho<b$ فإن : $\rho+1\le b$

ومنه : $bb'(q'-q)<b'b$.

** نستنتج من العلاقة أعلاه أن : $q'-q<1$ وبما أن : $0\le q'-q$ فإن : $q'=q$.

5) لدينا : $bb'(q'-q)=n+\rho b'-\rho'b$ وبما أن $n<b+b'$ و $\rho'\ge0$ فإن:

$bb'(q'-q)<b+b'+\rho b'=b+b'(\rho+1)$ وبما أن : $\rho+1\le b$ نستخلص:

$bb'(q'-q)<b+b'b=b(b'+1)$ ومنه : $b'(q'-q)<b'+1$ أي : $b'(q'-q)\le b'$ إذن : $0\le q'-q\le1$. أي : $q'=q$ أو $q'=q+1$

* نفترض أن $q'=q$.

العلاقة : $bb'(q'-q)=n+\rho b'-\rho'b$ تستلزم (*) $n+\rho b'-\rho'b=0$. وبما أن : $b'|n$ فإن : $b'|\rho'b$ وحسب العلاقة: $a'b-ab'=1$ فإن : $b\wedge b'=1$

إذن : $b'|\rho'$ وبما أن : $\rho'<b'$ فإن : $\rho'=0$ ومنه حسب (*) أعلاه: $n+b'\rho=0$ ومنه بالخصوص : $n=0$ وهذا مستحيل. إذن : $q'=q+1$.

6) أ) **الوجود: حسب ما سبق العدد الجذري $r''=\frac{a+a'}{b+b'}$ يحقق المطلوب.

**الوحدانية : نفترض أن : $\frac{a}{b}<\frac{x}{b+b'}<\frac{a+a'}{b+b'}$ بحيث : $x\in\mathbb{N}$ إذن :

ومنه $ab+ab'<bx<ba+ba'$: ومنه $0<bx-ab-ab'<ba'-ab'=1$ وهذا مستحيل.بنفس الطريقة نبرهن أن : $\frac{a+a'}{b+b'}<\frac{x}{b+b'}<\frac{a'}{b'}$ مستحيل.ومنه الوحدانية.

ب) نفترض أن : (**) $\frac{a}{b}<\frac{m}{n}<\frac{a'}{b'}$ بحيث : $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ و : $n<b+b'$. القسمة الأقليدية ل na على b ثم ل na' على b' تكتبان على التوالي :

$$\begin{cases} na=bq+\rho & 0\le\rho<b \\ na'=b'q'+\rho' & 0\le\rho'<b' \end{cases}$$

المتفاوتة المزدوجة (**) أعلاه تكتب إذن: $q+\frac{\rho}{b}<m<q'+\frac{\rho'}{b'}$.حسب الدراسة السابقة وبما أننا في شروطها هناك حالتين:

*******إذا كان : $b'\nmid n$ فإن : $q'=q$ ومنه $q+\frac{\rho}{b}<m<q+\frac{\rho'}{b'}$ وبالأحرى : $q<m<q+1$ وهذا مستحيل.

*******إذا كان : $b'\mid n$ فإن : $q'=q+1$ و ،وبما أن : $\rho'=na'-b'q$ مضاعف ل b' و يحقق: $\rho'<b'$ فإن : $q+\frac{\rho}{b}<m<q+\frac{\rho'}{b'}$ تستلزم: $q+<m<q+1$

وهذا مستحيل كما سبق.ومنه:لا يوجد ما بين r و r' عدد جذري مقامه أصغر قطعا من $b+b'$.

7)حسب ما سبق ،نحصل على الأعداد المطلوبة بجمع البسطين و المقامين على التوالي للعددين الأولين ونتوقف إذا حصلنا على مقام أكبر من 25. ننجز ذلك عبر المراحل التالية :

$$\frac{2}{3}<\frac{7}{10}<\frac{5}{7}$$

$$\frac{2}{3}<\frac{9}{13}<\frac{7}{10}<\frac{12}{17}<\frac{5}{7}$$

$$\frac{2}{3}<\frac{11}{16}<\frac{9}{13}<\frac{16}{23}<\frac{7}{10}<\frac{12}{17}<\frac{17}{24}<\frac{5}{7}$$

$$\frac{2}{3}<\frac{13}{19}<\frac{11}{16}<\frac{9}{13}<\frac{16}{23}<\frac{7}{10}<\frac{12}{17}<\frac{17}{24}<\frac{5}{7}$$

$$\frac{2}{3}<\frac{15}{22}<\frac{13}{19}<\frac{11}{16}<\frac{9}{13}<\frac{16}{23}<\frac{7}{10}<\frac{12}{17}<\frac{17}{24}<\frac{5}{7}$$

$$\frac{2}{3}<\frac{17}{25}<\frac{15}{22}<\frac{13}{19}<\frac{11}{16}<\frac{9}{13}<\frac{16}{23}<\frac{7}{10}<\frac{12}{17}<\frac{17}{24}<\frac{5}{7}$$

تمرين03

$$(E)\quad 2z^{4}-6z^{3}+9z^{2}-6z+2=0$$

1)نضع لكل z من $\mathbb{C}$: $P(z)=2z^4-6z^3+9z^2-6z+2=0$. بما أن معاملات الحدودية $P(z)$ حقيقية فإن : $P(z)=0\Leftrightarrow P(\overline{z})=0$ $(\forall z\in\mathbb{C})$.

******نلاحظ أن : $P(0)=2\neq 0$ ومنه :

$$P(z)=0\Leftrightarrow z^4\left(2-\frac{6}{z}+\frac{9}{z^2}-\frac{6}{z^3}+\frac{2}{z^4}\right)=0\Leftrightarrow P\left(\frac{1}{z}\right)=0$$

2)حسب السؤال السابق الحلول الأخرى هي : $\frac{1}{z_0},\overline{z}_0,\frac{1}{\overline{z}_0}$.

3)لدينا إذن : $z=\left[|z|,\frac{\pi}{4}\right]$ أي : $z=\frac{\sqrt{2}}{2}|z|+i\frac{\sqrt{2}}{2}|z|$ ومنه : $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)$ وبما أن : $\mathrm{Im}(z)=1$ حسب المعطيات فإن : $z=1+i$. وحسب السؤال 2) فإن الحلول الأخرى للمعادلة هي : $\overline{z}=1-i$ و $\frac{1}{z}=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{2}$ و $\frac{1}{\overline{z}}=\frac{1}{1+i}=\frac{1+i}{2}$.

مجموعة الحلول : $S=\left\{1+i,1-i,\frac{1+i}{2},\frac{1-i}{2}\right\}$

4)حسب ما سبق:

$$P(z)=2(z-(1+i))(z-(1-i))\left(z-\frac{1+i}{2}\right)\left(z-\frac{1-i}{2}\right)$$

أي : $P(z)=2(z^2-2z+2)\left(z^2-z+\frac{1}{2}\right)$ بمعنى :

$$P(z)=2\left(z^2-2z+2\right)\left(2z^2-2z+1\right).$$

ومنه : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f(x)=2\left(x^2-2x+2\right)\left(2x^2-2x+1\right)$.

تمرين04

1)بما أن $card(G)=4$ فإن العناصر : a^4,a^3,a^2,a,e ليست مختلفة مثنى مثنى و بالتالي فإن أحد العناصر a و a^2 و a^3 و a^4 يساوي e أو ان اثنين منها متساوية.

*في الحالة الأولى : انتهى. (لأن $a \neq e$)

*في الحالة الثانية : $a^k = a^l$ بحيث : $1 \le k < l \le 4$ ومنه : $a^{l-k} = e$ علما أن: $1 \le l-k \le 3$. وبما أن : $a \neq e$: فإن أحد العناصر : a^2 و a^3 و a^4 يساوي e.

2) أ) بما أن : $a^3 = e$: فإن: $aa^2 = a^2a = e$ ومنه a و a^2 متماثلان.

ب) بما أن العنصر a منتظم في الزمرة $(G,.)$ فإن : $a^2 = a \Rightarrow a = e$. إذن : $a^2 \neq a$

من جهة أخرى لدينا: $a^2 = e \Rightarrow a^3 = a \Rightarrow e = a$ ومنه العناصر : a^2, a, e مختلفة مثنى مثنى. إذن : $G = \{e, a, a^2, b\}$ بحيث b هو العنصر الرابع.

ج) لدينا :
$$\begin{array}{l} ab = e \Rightarrow b = a^2 \\ ab = a \Rightarrow b = e \\ ab = a^2 \Rightarrow b = a \\ ab = b \Rightarrow a = e \end{array}$$
ومنه : $ab \notin \{e, a, a^2, b\}$ وهذا مستحيل لأن . قانون داخلي في G. نستنتج إذن أن الفرضية: $a^3 = e$ مستحيلة.

3) أ) $G = \{e, a, b, c\}$. لدينا : $e^2 = e$ حسب المعطيات لدينا $a^2 = b^2 = e$ بقي أن نبين أن $c^2 = e$.

$(G,.)$ زمرة إذن العنصر c يقبل عنصرا مماثلا في G. لدينا: $c^{-1} = a \Rightarrow ca = e = a^2 \Rightarrow c = a$

بالمثل : $c^{-1} = b \Rightarrow cb = e = b^2 \Rightarrow c = b$ و أخيرا $c^{-1} \neq e$ إذن : $c^{-1} = c$ أي : $c^2 = e$.

ومنه : $x^2 = e \quad (\forall x \in G)$

ليكن $(x,y) \in G^2$. لدينا $(xy)^2 = e$ ومنه : $xyxy = e$ وبما أن : $x^2 = y^2 = e$ فإن : $x^2y^2 = e$

ومنه : $xxyy = xyxy$ ومنه : $xy = yx$ (لأن x و y عنصران منتظمان في الزمرة $(G,.)$).

ب) لدينا: $ab \in G = \{e, a, b, c\}$. ولدينا : $ab \notin \{e, a, b\}$ لأن: $ab = e \Rightarrow ab = a^2 \Rightarrow a = b$

و : $ab = a \Rightarrow ab = ae \Rightarrow b = e$ و $ab = b \Rightarrow ab = eb \Rightarrow a = e$. إذن : $ab = c$.

بنفس الطريقة نبين أن : $bc = a$ ز أن : $ac = b$.

وبما أن الزمرة تبادلية نستنتج جدولها:

.	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e