المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي
قطاع التربية الوطنية

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2005

المادة : الرياضيات	الشعبة : العلوم الرياضية (أ و ب)	المدة : 4ساعات	المعامل : 10

التمرين الأول :

نعتبر في $\mathbb{R}^2$ قانون التركيب الداخلي * المعرف بما يلي :

لكل (a,b) و (x,y) من $\mathbb{R}^2$: $(a,b)*(x,y)=\left(\frac{ax+by}{2},\frac{ay+bx}{2}\right)$

لتكن المجموعة : $E=\left\{\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)\in\mathbb{R}^2 / m\in\mathbb{R}^*\right\}$

1) بين أن * قانون داخلي في المجموعة E

2) ليكن التطبيق φ المعرف من $\mathbb{R}^*$ نحو E بما يلي : $\left(\forall m\in\mathbb{R}^*\right)\ \varphi(m)=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)$

أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,*)$

ب) استنتج أن $(E,*)$ زمرة تبادلية محددا عنصرها المحايدومماثل كل عنصر $\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)$

حيث m عدد حقيقي غير منعدم .

3) نعتبر المجموعة $F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\geq 2 \quad و \quad y^2=x^2-4\ \right\}$

أ) بين أن : $F=\left\{\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)\in\mathbb{R}^2 / m>0\right\}$

ب) بين أن $(F,*)$ زمرة جزئية من $(E,*)$

التمرين الثاني:

الجزء الأول :

p عدد صحيح طبيعي أولي أكبر أو يساوي من 5

1) بين ان : $p^2\equiv 1\,[3]$

2) أ) باستعمال زوجية العدد p ، بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي q بحيث

$$p^2-1=4q(q+1)$$

ب) استنتج أن: $p^2 \equiv 1\ [8]$

3) بين أن : $p^2 \equiv 1\ [24]$

الجزء الثاني :

ليكن a عددا صحيحا طبيعيا أوليا مع العدد 24 .

1) بين أن : $a^2 \equiv 1\ [24]$

2) هل توجد أعداد صحيحة طبيعية a_1 ، … ، a_{23} حيث : $a_k \wedge 24 = 1$ لكل k من $\{1,\dots,23\}$ و $a_1^2+\dots+a_{23}^2=23997$ ؟ ($a_k \wedge 24$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a_k و 24)

التمرين الثالث

الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=(x+2)e^{-\frac{2}{x}} & ;\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

ليكن $\mathcal{C}_f$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

1) أ) بين أن f متصلة على اليمين في 0

ب) بين أن f قابلة للإشتقاق على اليمين في 0

ج) بين أن f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$

2) أ) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب) بين أن : $(\forall t\ge 0)\quad 0\le e^{-t}+t-1\le \frac{t^2}{2}$

ج) بين ان : $(\forall x>0)\quad -\frac{4}{x}\le f(x)-x\le \frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}$

د) استنتج أن المنحنى $\mathcal{C}_f$ يقبل مقاربا مائلا (Δ) ينبغي تحديد معادلة له .

3) أنشئ المنحنى $\mathcal{C}_f$ و المستقيم (Δ)

الجزء الثاني

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f_n(x)=\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{x}} \quad ; \quad x>0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$$

1) بين أن f_n قابلة للإشتقاق على اليمين في 0.

2) ادرس تغيرات الدالة f_n على المجال $[0,+\infty[$

3) ا) بين أن، لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، المعادلة $f_n(x)=\frac{2}{n}$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0.+\infty[$

ب) بين أن : $(\forall x>0)\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\ f_{n+1}(x)-\frac{2}{n+1}>f_n(x)-\frac{2}{n}$

ج) استنتج أن المتتالية (a_n) تناقصية ثم بين أن (a_n) متقاربة .

نضع : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$

د) بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\quad na_n=2e^{\frac{2}{a_n}}-2$

هـ) بين أن $a=0$.

الجزء الثالث

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$F(x)=\int_x^{2x} f(t)\,dt$$

(f هي الدالة المعرفة في الجزء الأول)

1) أ) بين أن : $xf(x)\le F(x)\le xf(2x) \qquad (\forall x>0)$

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

2) أ) بين أن F قابلة للإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$

ب) بين أن :
$$\begin{cases} F'(x)=e^{-\frac{2}{x}}\left(\left(x+2\right)\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)+\left(3x+2\right)e^{\frac{1}{x}}\right) \quad ; \quad x>0 \\ F_d'(0)=0 \end{cases}$$

($F_d'(0)$ هو العدد المشتق للدالة F في 0 على اليمين)

3) أعط جدول التغيرات الدالة F

التمرين الرابع

لكل عدد عقدي z مخالف للعدد -1 ، نضع : $f(z)=\frac{iz-1}{(z+1)^2}$

1) أ) حدد العدد الحقيقي y بحيث : $f(iy)=iy$

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $f(z)=z \qquad (E)$

نرمز ب z_0 و z_1 و z_2 لحلول المعادلة (E) حيث $Re(z_0)=0$ و $Re(z_1)>Re(z_2)$

2) أ) تحقق أن : $z_1+1=e^{i\frac{11\pi}{6}}$ و $z_2+1=e^{i\frac{7\pi}{6}}$

ب) استنتج الكتابة المثلثية لكل من العددين z_1 و z_2

3) في هذا السؤال نفترض أن $z=e^{i\alpha}$ حيث $0\leq\alpha<\pi$.

أ) بين أن : $\overline{f(z)}=izf(z)$

ب) حدد α إذا علمت أن : $f(z)+\overline{f(z)}=0$

ج) اكتب $f(z)$ على الشكل $f(z)=re^{i\varphi}$ حيث : $(r,\varphi)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$

4) حدد z إذا علمت أن $\begin{cases}|z|=1\\ Re(z)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

انتهى