الثانية سلك بكالوريا علوم رياضية	فرض شهر أبريل 2004

التمرين 1

$$\begin{cases} f(x)=e^{\frac{1}{\ln x}} & x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\} \\ f(0)=1 \quad ; & f(1)=0 \end{cases}$$

1- ندرس اتصال f في 1 و اشتقاق f على يمين 0 ثم على يسار 1

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+} e^{\frac{1}{\ln x}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-} e^{\frac{1}{\ln x}}=0=f(1)$$

f غير متصلة في 1

f متصلة على يسار 1

*

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{\ln x}e^{\frac{1}{\ln x}}\times\frac{\ln x}{x-1}=0\times1=0$$

f غير قابلة للاشتقاق على يمين 0 و C_f يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة ذات الأفصول 0

f قابلة للاشتقاق على يسار 1 و C_f يقبل نصف مماس أفقي عند النقطة ذات الأفصول 1

2- ندرس تغيرات الدالة f

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*-\{1\} \qquad f'(x)=\left(\frac{-1}{x(\ln x)^2}\right)e^{\frac{1}{\ln x}}$$

	0		**1**		$+\infty$
$f'(x)$		-		-	
f	**1** ↘		**0** ∥ $+\infty$	↘	**1**

3- أ) نبين أن المستقيم $(D): y=x$ محور تماثل للمنحنى C_f

ليكن $M\left(x;e^{\frac{1}{\ln x}}\right)\in C_f$

لدينا $f\left(e^{\frac{1}{\ln x}}\right)=e^{\frac{1}{\ln\left(e^{\frac{1}{\ln x}}\right)}}=e^{\ln x}=x$ ومنه $M'\left(e^{\frac{1}{\ln x}};x\right)\in C_f$

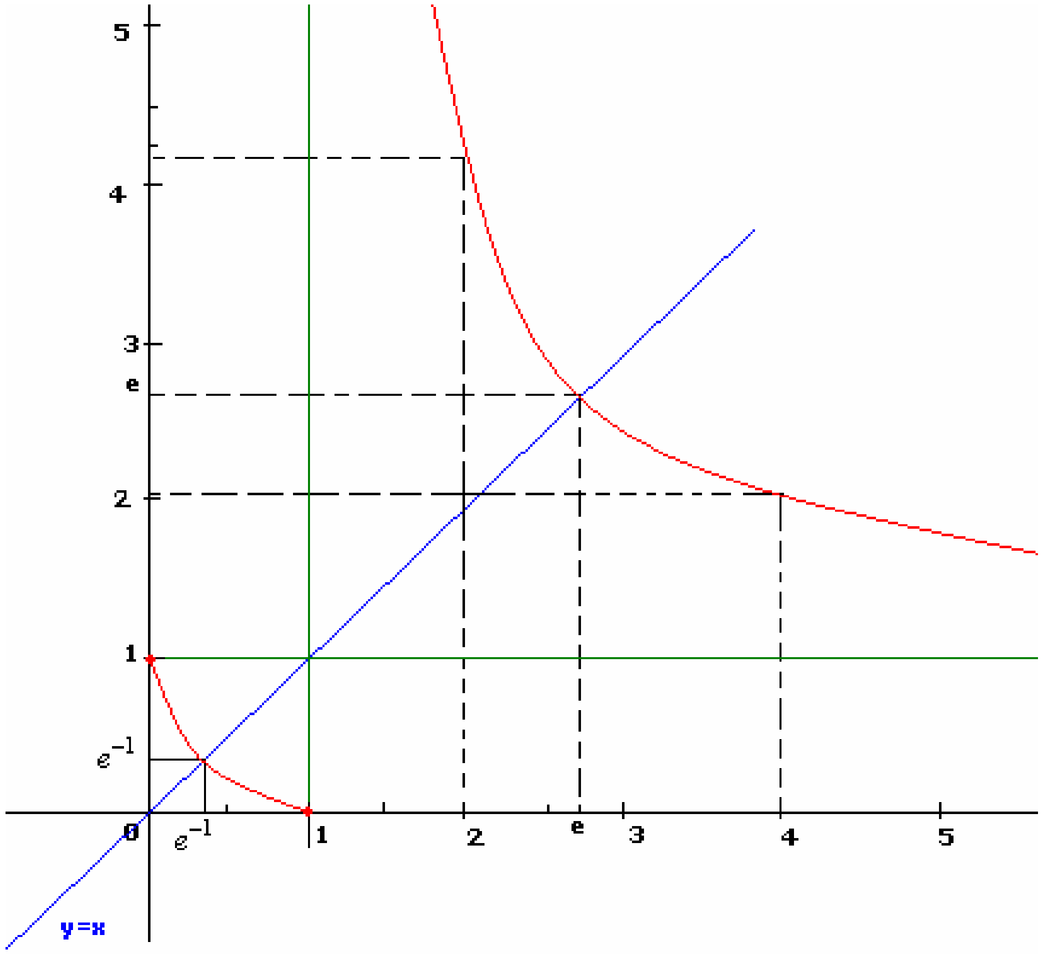
وحيث أن M و M' متماثلتان بالنسبة للمستقيم $(D):y=x$ فان المستقيم $(D):y=x$ محور تماثل للمنحنى C_f

ب) نحدد نقطة تقاطع C_f و (D)

$$f(x)=x\Leftrightarrow e^{\frac{1}{\ln x}}=\mathrm{x}\Leftrightarrow\frac{1}{\ln x}=\ln\mathrm{x}\Leftrightarrow(\ln\mathrm{x})^2=1\Leftrightarrow\mathrm{x}=\mathrm{e}\quad\text{ou}\quad\mathrm{x}=\mathrm{e}^{-1}$$

اذن C_f و (D) يتقاطعان في النقطتين ذات الأفصولين e و e^{-1}

ج) ننشئ المنحنى C_f



(B) $F(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt\quad\forall x\in]1;+\infty[$

1- أ) نبين أن $f(x+1)\le F(x)\le f(x)\quad\forall x]1;+\infty[$

ليكن $x\in]1;+\infty[$

نعتبر $x\le t\le x+1$ وحيث f تناقصية على $]1;+\infty[$ فان $f(x+1)\le f(t)\le f(x)$

ومنه $\int_x^{x+1}f(x+1)dt\le\int_x^{x+1}f(t)dt\le\int_x^{x+1}f(x)dt$

أي $\left[tf(x+1)\right]_x^{x+1}\le\int_x^{x+1}f(t)dt\le\left[tf(x)\right]_x^{x+1}$

اذن $\forall x \left]1;+\infty\right[\quad f(x+1) \le F(x) \le f(x)$

ب) نستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

لدينا $\forall x \left]1;+\infty\right[\quad f(x+1) \le F(x) \le f(x)$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \quad ; \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1) = 1$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

2- أ) نبين أن $\forall u \in \left]0;+\infty\right[\quad e^u \ge u+1$

$\forall t \in \left]0;+\infty\right[\quad e^t \ge 1$ ومنه $\forall u \in \left]0;+\infty\right[\quad \int_0^u e^t dt \ge [t]_0^1$

أي $\forall u \in \left]0;+\infty\right[\quad \left[e^t\right]_0^u \ge [t]_0^u$ إذن $\forall u \in \left]0;+\infty\right[\quad e^u \ge u+1$

ب) نستنتج أنه $\forall x \in \left]1;+\infty\right[\quad F(x) - 1 \ge \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt$

$\forall t \in \left]1;+\infty\right[\quad e^{\frac{1}{\ln t}} \ge \frac{1}{\ln t} + 1$ ومنه $\forall x \in \left]1;+\infty\right[\quad \int_x^{x+1} e^{\frac{1}{\ln t}} dt \ge \int_x^{x+1} (\frac{1}{\ln t} + 1) dt$

و بالتالي $\forall x \in \left]1;+\infty\right[\quad F(x) \ge [t]_x^{x+1} + \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt$

إذن $\forall x \in \left]1;+\infty\right[\quad F(x) - 1 \ge \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt$

ج) بين أن $\forall t \in \left]1;+\infty\right[\quad \ln t \le t-1$

$\forall u \in \left]1;+\infty\right[\quad \frac{1}{u} \le 1$ ومنه $\forall t \in \left]1;+\infty\right[\quad \int_1^t \frac{1}{u} du \le \int_1^t du$

إذن $\forall t \in \left]1;+\infty\right[\quad \ln t \le t-1$

د) نستنتج أن $\forall x \in \left]1;+\infty\right[\quad \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt \ge \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$\forall t \in \left]1;+\infty\right[\quad \ln t \le t-1$ ومنه $\forall t \in \left]1;+\infty\right[\quad \frac{1}{\ln t} \ge \frac{1}{t-1}$

ومنه $\forall x \in \left]1;+\infty\right[\quad \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt \ge \int_x^{x+1} \frac{1}{t-1} dt$

$\forall x \in \left]1;+\infty\right[\quad \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt \ge \left[\ln(t-1)\right]_x^{x+1}$

إذن $\forall x \in \left]1;+\infty\right[\quad \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt \ge \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

ه) نحدد $\lim\limits_{x\to 1^+} F(x)$

لدينا $\int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt \ge \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \quad ; \quad \forall x \in \left]1;+\infty\right[\quad F(x) - 1 \ge \int_x^{x+1} \frac{1}{\ln t} dt$

ومنه $\forall x \in \left]1;+\infty\right[\quad F(x) - 1 \ge \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

وحيث أن $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = +\infty$ فان $\lim\limits_{x\to 1^+} F(x) = +\infty$

3- ندرس تغيرات F

لدينا $F(x)=\int_x^{x+1} f(t)dt \quad \forall x\in]1;+\infty[$

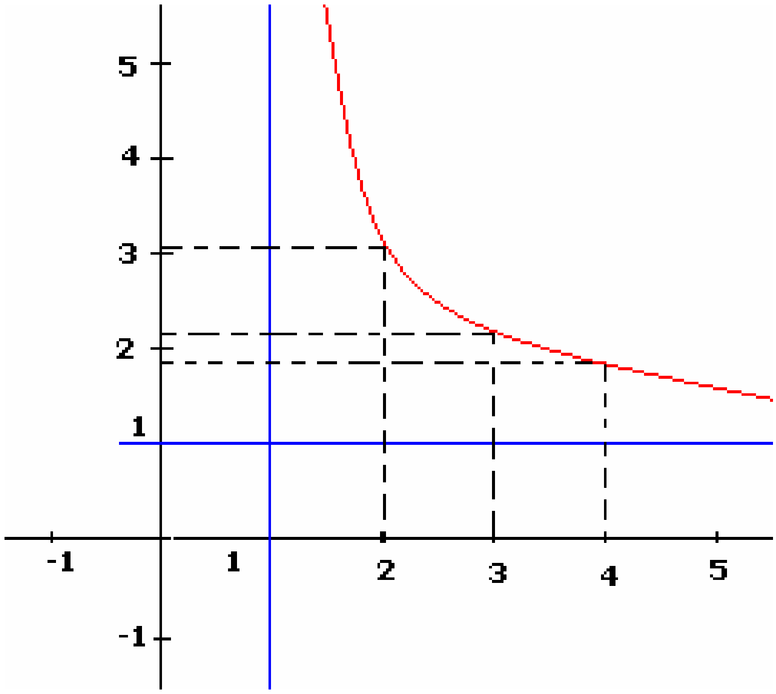
ومنه $F'(x)=f(x+1)-f(x) \quad \forall x\in]1;+\infty[$

وحيث f تناقصية ومنه $F'(x)\leq 0 \quad \forall x\in]1;+\infty[$

اذن F تناقصية

x	1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
F	$+\infty$ $\searrow$ 1

4- ننشئ منحنى الدالة F في المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$



التمرين2

$$M_\lambda=\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ \frac{1}{4}b & a+\lambda b\end{pmatrix}/(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$ حيث $\lambda\in]-1;1[$

1- نبين أن M_λ مستقرة بالنسبة للجمع و الضرب في $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

ليكن $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ و $(a';b')\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ \frac{1}{4}b & a+\lambda b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a' & -b' \\ \frac{1}{4}b' & a'+\lambda b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+a' & -(b+b') \\ \frac{1}{4}(b+b') & a+a'+\lambda(b+b')\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+a' & -(b+b') \\ \frac{1}{4}(b+b') & a+a'+\lambda(b+b')\end{pmatrix}\in M_\lambda$$

اذن M_λ مستقرة بالنسبة للجمع

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ \frac{1}{4}b & a+\lambda b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \frac{1}{4}b' & a'+\lambda b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'-\frac{1}{4}bb' & -ab'-ba'-\lambda bb' \\ \frac{1}{4}ba'+\frac{1}{4}ab'+\frac{1}{4}\lambda bb' & -\frac{1}{4}bb'+aa'+\lambda ab'+\lambda a'b+\lambda^2 bb' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aa'-\frac{1}{4}bb' & -(ab'+ba'+\lambda bb') \\ \frac{1}{4}(ba'+ab'+\lambda bb') & aa'-\frac{1}{4}bb'+\lambda(ab'+a'b+\lambda bb') \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ \frac{1}{4}b & a+\lambda b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \frac{1}{4}b' & a'+\lambda b' \end{pmatrix} \in M_\lambda$$

M_λ مستقرة بالنسبة الضرب

2- بين أن $(M_\lambda;+;\times)$ جسم تبادلي

لدينا M_λ مستقرة بالنسبة للجمع و $-\begin{pmatrix} a & -b \\ \frac{1}{4}b & a+\lambda b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -(-b) \\ \frac{1}{4}(-b) & -a+\lambda(-b) \end{pmatrix}$

ومنه $-\begin{pmatrix} a & -b \\ \frac{1}{4}b & a+\lambda b \end{pmatrix} \in M_\lambda$

إذن $(M_\lambda;+)$ زمرة جزئية

لدينا

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ \frac{1}{4}b & a+\lambda b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \frac{1}{4}b' & a'+\lambda b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & -(b+b') \\ \frac{1}{4}(b+b') & a+a'+\lambda(b+b') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a'+a & -(b'+b) \\ \frac{1}{4}(b'+b) & a'+a+\lambda(b'+b) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \frac{1}{4}b' & a'+\lambda b' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ \frac{1}{4}b & a+\lambda b \end{pmatrix}$$

ومنه $(M_\lambda;+)$ زمرة تبادلية

*** الضرب توزيعي على الجمع في $M\lambda$ (لأن $M_\lambda \subset \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ و الضرب توزيعي على الجمع في $(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}))$**

*** الضرب تجميعي في $M\lambda$ (لأن $M_\lambda \subset \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ والضرب تجميعي في $(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}))$**

* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin M_\lambda$

* نضع $M=\begin{pmatrix} a & -b \\ \frac{1}{4}b & a+\lambda b \end{pmatrix}$ ليكن $M\in M_\lambda^*$

$$\det(M)=\begin{vmatrix} a & -b \\ \frac{1}{4}b & a+\lambda b \end{vmatrix}=a^2+\lambda ba+\frac{1}{4}b^2$$

$$\det(M)=\left(a+\frac{\lambda b}{2}\right)^2+\frac{1}{4}b^2\left(1-\lambda^2\right)$$

بما أن $\lambda\in]-1;1[$ فان $1-\lambda^2\succ 0$ وحيث $(a;b)\neq(0;0)$ فان $\det(M)\neq 0$

ومنه M يقبل مقلوبا في $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

$$M^{-1}=\frac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix} a+\lambda b & b \\ -\frac{1}{4}b & a \end{pmatrix}=\frac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix} a+\lambda b & -(-b) \\ \frac{1}{4}(-b) & (a+\lambda b)+\lambda(-b) \end{pmatrix}\in M_\lambda$$

ومنه M يقبل مقلوبا في M_λ

إذن $(M_\lambda;+;\times)$ جسم

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ \frac{1}{4}b & a+\lambda b \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a' & -b' \\ \frac{1}{4}b' & a'+\lambda b' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'-\frac{1}{4}bb' & -ab'-ba'-\lambda bb' \\ \frac{1}{4}ba'+\frac{1}{4}ab'+\frac{1}{4}\lambda bb' & -\frac{1}{4}bb'+aa'+\lambda ab'+\lambda a'b+\lambda^2 bb' \end{pmatrix}$$

a و a' تلعبان دوران متماثلان و أيضا b و b'

ومنه الضرب تبادلي في M_λ

إذن $(M_\lambda;+;\times)$ جسم تبادلي

-3 نضع $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{4} & \lambda \end{pmatrix}$

نثبت أن $(A;I)$ أساس للفضاء $(M_\lambda;+;\bullet)$

$$M=\begin{pmatrix} a & -b \\ \frac{1}{4}b & a+\lambda b \end{pmatrix}=aI+bA$$

$(A;I)$ أسرة مولد ة لـ M_λ

$$aI+bA=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix} a & -b \\ \frac{1}{4}b & a+\lambda b \end{pmatrix}=0\Leftrightarrow a=b=0$$

اذن $(A;I)$ أسرة ومنه $(A;I)$ أساس للفضاء $(M_\lambda;+;\bullet)$

التمرين3

نعتبر المعادلة التفاضلية $(E):\quad y''+2y'+2y=-(x+1)e^{-x}+2$

-1 أ) نتأكد أن الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x)=\int_0^x te^{-t}dt$ حل خاص للمعادلة (E)

لدينا $u'(x)=xe^{-x}$ و $u''(x)=e^{-x}-xe^{-x}$

$$u(x)=\int_0^x te^{-t}dt=\left[-te^{-t}\right]_0^x+\int_0^x e^{-t}dt=\left[-te^{-t}\right]_0^x+\left[-e^{-t}\right]_0^x$$

$$u(x)=-xe^{-x}-e^{-x}+1$$

$$u''(x)+2u'(x)+2u(x)=e^{-x}-xe^{-x}+2xe^{-x}+2\left(-xe^{-x}-e^{-x}+1\right)=-(x+1)e^{-x}+2$$

إذن الدالة u حل خاص للمعادلة (E)

ب- نحل المعادلة (E)

المعادلة المميزة للمعادلة (E) هي $q^2+2q+2=0$

$\Delta'=-3$ ومنه $q=-1\mp i\sqrt{3}$

اذن مجموعة حلول المعادلة (E) هي الدوال المعرفة

بـ $x\to e^{-x}\left(\alpha\cos\sqrt{3}x+\beta\sin\sqrt{3}x\right)-(x+1)e^{-x}+1$

2- نعتبر المتتالية المعرفة بما يلي $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}e^{\frac{-k}{n}}$

نحدد $\lim_{n\to+\infty}u_n$

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}e^{\frac{-k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}e^{\frac{-k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\quad / \quad f(x)=xe^{-x}$$

f متصلة في $[0;1]$

ومنه $\lim_{n\to+\infty}u_n=\int_0^1 xe^{-x}dx=\left[-(x+1)e^{-x}+1\right]_0^1=-2e^{-1}+1$