تصحيح فرض شهر مارس 2005 Moustaouli Mohamed	2 سلك بكالوريا علوم رياضيات

التمرين1

$$f(x)=\frac{x^2-x+\ln(x-1)}{(x-1)^2}$$

-1 نحدد D_f ثم النهايات عند محدات D_f

$$x\in D_f \Leftrightarrow x-1\succ 0 \Leftrightarrow x\succ 1$$

إذن $D_f=]1;+\infty[$

* $$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-x+\ln(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{(x-1)^2}\left[x^2-x+\ln(x-1)\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+\ln(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}-\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{(x-1)^2}\ln\frac{1}{(x-1)^2}\right]=1$$

-2 $$g(x)=2-x-2\ln(x-1)$$

أ) ندرس تغيرات الدالة g و نعطي جدول تغيراتها

$$D_g=]1;+\infty[$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2-x-2\ln(x-1)\right]=-\infty \qquad \lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\left[2-x-2\ln(x-1)\right]=+\infty$$

$$\forall x\in]1;+\infty[\qquad g'(x)=-1-\frac{2}{x-1}=\frac{-x-1}{x-1}$$

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	
g	$+\infty$ ↘	$-\infty$

ب) نبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا هو 2

لدينا g متصلة و تزايديا قطعا على $]1;+\infty[$ و $g(2)=0$

اذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا هو 2

-3 أ) ندرس تغيرات f

$$\forall x\in]1;+\infty[\qquad f'(x)=\frac{\left(2x-1+\frac{1}{x-1}\right)(x-1)^2-2(x-1)\left(x^2-x+\ln(x-1)\right)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{2x^2-3x+2-2x^2+2x-2\ln(x-1)}{(x-1)^3}=\frac{-x+2-2\ln(x-1)}{(x-1)^3}$$

إذن $\forall x\in]1;+\infty[\qquad f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^3}$

من 2 أ) و ب) نستنتج أن $f'(x)\succ 0 \quad \forall x\in]1;2[$ و $f'(x)\prec 0 \quad \forall x\in[2;+\infty[$

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

ب) جدول قيم لدالة f لبعض الأعداد $\frac{3}{2}$; $\frac{11}{8}$; 3 ; 4 بالدالة f و قيم

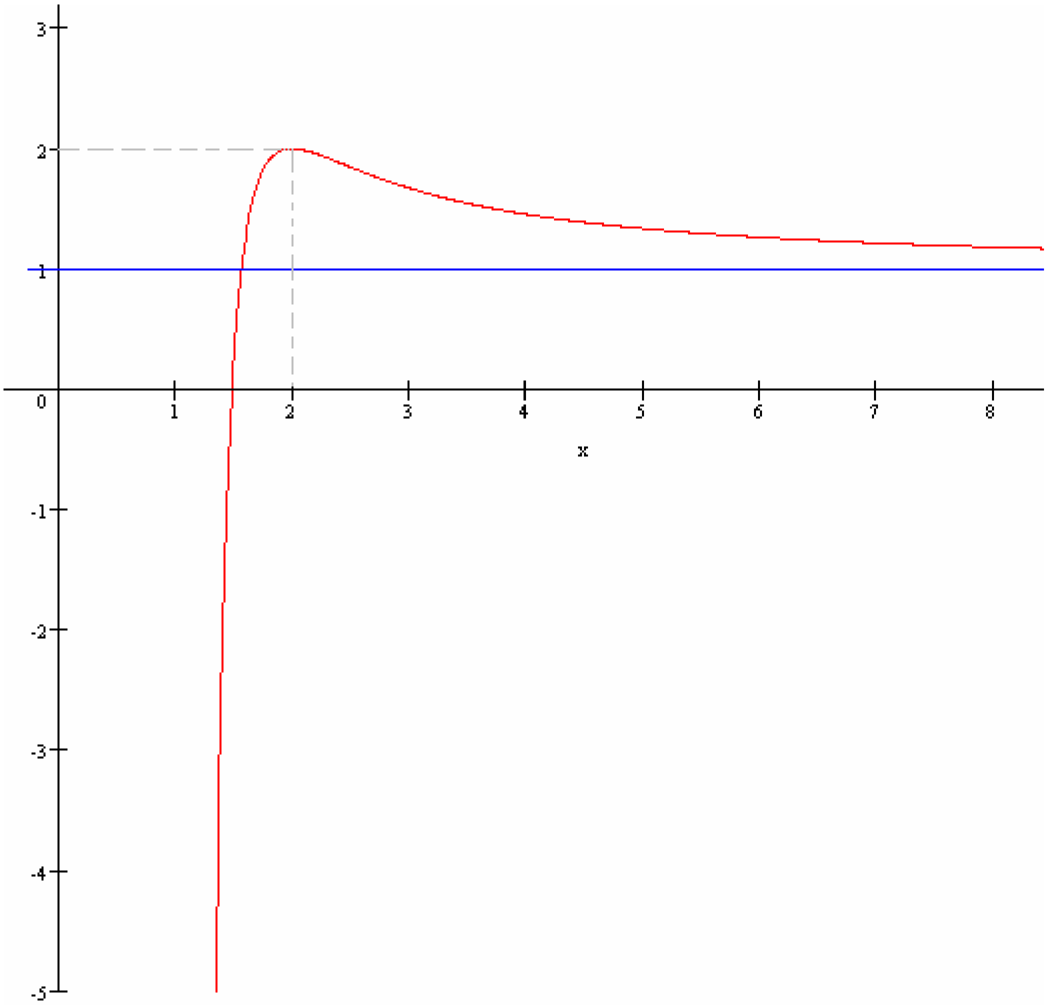
x	4	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{8}$
$f(x)$	$\frac{12+\ln 3}{9}$	$\frac{6+\ln 2}{4}$	$3-4\ln 2$	$\frac{33+64\ln\frac{3}{8}}{9}$
$\approx f(x)$	$1,45$	$1,67$	$0,23$	$-3,31$

ج) نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\left]\frac{11}{8};\frac{3}{2}\right[$

لدينا f متصلة على و تزايدية قطعا على $\left]\frac{11}{8};\frac{3}{2}\right[$ و $f\left(\frac{11}{8}\right)\times f\left(\frac{3}{2}\right)\prec 0$

ومنه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\left]\frac{11}{8};\frac{3}{2}\right[$

-4 ننشئ المنحنى C_f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$



التمرين2

C_1 صندوق يحتوي على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء.

-1 نسحب خمس كرات بالتتابع و بإحلال من الصندوق C_1

نحسب احتمال الحصول على 4 كرات بيضاء بالضبط

يمكن اعتبار التجربة هي تكرار الاختبار سحب كرة خمس مرات و احتمال الحصول على كرة بيضاء في الاختبار هي $\frac{3}{7}$

إذن احتمال الحصول على 4 كرات بيضاء بالضبط هو $C_5^4\left(\frac{3}{7}\right)^4\times\frac{4}{7}=\frac{1620}{16807}$

-2 C_2 صندوق آخر يحتوي على 3 كرات بيضاء و كرتين سوداويين.

نحسب احتمال الحصول على كرتين بيضاويين

$$p(B)=p_{C_1}(B)\times p(C_1)+p_{C_2}(B)\times p(C_1)$$

لدينا $p(C_1)=\frac{1}{3}$ و $p(C_2)=\frac{2}{3}$

وحيث أن $p_{C_2}(B)=\frac{A_3^2}{A_5^2}=\frac{3}{10}$; $p_{C_1}(B)=\frac{A_3^2}{A_7^2}=\frac{1}{7}$ فان $p(B)=\frac{1}{21}+\frac{1}{5}=\frac{26}{105}$

التمرين3

لتكن $(G;\times)$ زمرة و $H=\{a\in G/ax=xa\quad \forall x\in G\}$

نبين أن $(H;\times)$ زمرة جزئية من $(G;\times)$

لدينا $H\neq\varnothing$ لأن $1_G\in H$

ليكن $a\in H$ و $b\in H^*$ و منه $ab^{-1}\in G$ لأن $(G;\times)$ زمرة و $ax=xa\quad \forall x\in G$

و $bx^{-1}=x^{-1}b\quad \forall x\in G^*$

إذن لدينا

$$\forall x\in G^*\quad (ab^{-1})x=a(b^{-1}x)=a(x^{-1}b)^{-1}=a(bx^{-1})^{-1}=a(xb^{-1})=(ax)b^{-1}=(xa)b^{-1}=x(ab^{-1})$$

و $(ab^{-1})0_G=0_G(ab^{-1})$

ومنه $ab^{-1}\in H$

اذن $(H;\times)$ زمرة جزئية من $(G;\times)$

التمرين4

$M_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a+mb\end{pmatrix}$ و $E_m=\left\{M_{(a;b)}/(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ حيث m عدد ثابت

-1 أ) نبين أن E_m مستقرة بالنسبة للجمع و الضرب في مجموعة المصفوفات $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

ليكن $M_{(a;b)}$ و $M_{(c;d)}$ عنصرين من E_m ($(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4$)

$$M_{(a;b)}+M_{(c;d)}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a+mb\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c+md\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c+m(b+d)\end{pmatrix}=M_{(a+c;b+d)}$$

ومنه $M_{(a;b)}+M_{(c;d)}\in E_m$ إذا E_m مستقرة بالنسبة للجمع

$$M_{(a;b)}\times M_{(c;d)}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a+mb \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c+md \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc-mbd \\ bc+ad+mbd & -bd+ac+mad+mbc+m^2bd \end{pmatrix}$$
$$=M_{(ac-bd;bc+ad+mbd)}$$

ومنه $M_{(a;b)}\times M_{(c;d)}\in E_m$ إذن E_m مستقرة بالنسبة لضرب

ب) نبين أن $(E_m;+;\times)$ حلقة تبادلية و واحدية

$E_m\neq\varnothing$

لدينا E_m مستقرة بالنسبة للجمع و $-M_{(a;b)}=M_{(-a;-b)}\in E_m$

إذن $(E_m;+)$ زمرة جزئية لزمرة $(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R});+)$

و حيث أن + تبادلي في $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ فان + تبادلي في E_m إذن $(E_m;+)$ زمرة تبادلية

لدين E_m مستقرة بالنسبة لضرب في $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

وحيث × تجميعي في $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ و توزيعي على الجمع $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

فان × تجميعي في E_m و توزيعي على الجمع في E_m

لدينا $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=M_{(1;0)}\in E_m$ إذن $(E_m;+;\times)$ حلقة واحدية

لدينا $M_{(a;b)}\times M_{(c;d)}==M_{(ac-bd;bc+ad+mbd)}=M_{(ca-db;cb+da+mdb)}=M_{(c;d)}\times M_{(a;b)}$

إذن × تبادلي في E_m ومنه $(E_m;+;\times)$ حلقة تبادلية و واحدية

2- نبين إذا كان $m\in]-2;2[$ فان $(E_m;+;\times)$ جسم

لتكن $m\in]-2;2[$

$(E_m;+;\times)$ حلقة تبادلية و واحدية

لتكن $M_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a+mb \end{pmatrix}\in E_m$ حيث $(a;b)\neq(0;0)$

لدينا × تبادلي في E_m

نحدد $M_{(x;y)}=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x+my \end{pmatrix}$ حيث $M_{(a;b)}\times M_{(x;y)}=M_{(ax-by;bx+ay+mby)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=M_{(1;0)}$

ومنه $\begin{cases} ax-by=1 \\ bx+(a+mb)y=1 \end{cases}$

ليكن Δ محددة النظمة $\Delta=\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a+mb \end{vmatrix}=a^2+mab+b^2$

ليكن Δ_2 مميز $a^2+mab+b^2$

$\Delta=b^2(m^2-4)$ بما أن $m\in]-2;2[$ فان $m^2-4\prec 0$

إذا كان $b=0$ فان $a\neq 0$ ومنه $\Delta\neq 0$

إذا كان $b\neq 0$ فان $\Delta_2\prec 0$ ومنه $\Delta\neq 0$

إذن $M_{(a;b)}$ يقبل مقلوبا في E_m

إذن $(E_m;+;\times)$ جسم

-3 (O) مجموعة التطبيقات $f_{(a;b)}$ في الفضاء V_2 المزود بالأساس $(\vec{i};\vec{j})$ المعرفة بما يلي:

$$\forall \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V_2 \quad \forall \vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in V_2 \quad f_{(a;b)}(\vec{u}) = \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = ax - by \\ y' = bx + ay \end{cases}$$

Ψ التطبيق المعرف بما يلي :

$$\Psi : \quad E_0 \to (O)$$
$$M_{(a;b)} \to f_{(a;b)}$$

نبين أن Ψ تشاكل من $(E_0;\times)$ نحو $((O);\circ)$

ليكن $M_{(a;b)}$ و $M_{(c;d)}$ عنصرين من E_0 ($(a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4$) $\quad m = 0$

لدينا $M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} = M_{(ac-bd;bc+ad)}$

ومنه $\Psi\left(M_{(a;b)} \times M_{(c;d)}\right) = \Psi\left(M_{(ac-bd;bc+ad)}\right) = f_{(ac-bd;bc+ad)}$

لدينا $\Psi\left(M_{(a;b)}\right) \circ \Psi\left(M_{(c;d)}\right) = f_{(a,b)} \circ f_{(c;d)}$

ليكن $\vec{u}(x;y)$ من V_2

$$f_{(a,b)} \circ f_{(c;d)}\left(\vec{u}(x;y)\right) = f_{(a,b)}\left[f_{(c;d)}\left(\vec{u}(x;y)\right)\right] = f_{(a;b)}\left(\vec{u}'(cx - dy; dx + cy)\right)$$

$$f_{(a,b)} \circ f_{(c;d)}\left(\vec{u}(x;y)\right) = \vec{u}''(acx - ady - bdx - bcy; bcx - bdy + adx + acy)$$

$$f_{(a,b)} \circ f_{(c;d)}\left(\vec{u}(x;y)\right) = \vec{u}''((ac - bd)x - (ad + bc)y; (ad + bc)x + (ac - bd)y)$$

$$f_{(a,b)} \circ f_{(c;d)}\left(\vec{u}(x;y)\right) = f_{(ac-bd;ad+bc)}\left(\vec{u}(x;y)\right)$$

ومنه $f_{(ac-bd;bc+ad)} = f_{(a,b)} \circ f_{(c;d)}$ و بالتالي $\Psi\left(M_{(a;b)}\right) \circ \Psi\left(M_{(c;d)}\right) = f_{(ac-bd;bc+ad)}$

ومنه $\Psi\left(M_{(a;b)} \times M_{(c;d)}\right) = \Psi\left(M_{(a;b)}\right) \circ \Psi\left(M_{(c;d)}\right)$

إذن Ψ تشاكل من $(E_0;\times)$ نحو $((O);\circ)$