

تمارين و حلول

تمرين 4

1- أ / تأكد أن  $\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} = \frac{1}{t(t+2)}$

ب / أحسب  $\int_1^2 \frac{dt}{t(t+2)}$

2- أحسب  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

3- نضع  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx$  ;  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx$

أحسب  $I+J$  و  $I-J$  ثم استنتج  $I$  و  $J$

1- أ / تأكد أن  $\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} = \frac{1}{t(t+2)}$

$\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} = \frac{t+2-t}{t(t+2)} = \frac{1}{t(t+2)}$

ب / نحسب  $\int_1^2 \frac{dt}{t(t+2)}$

$\int_1^2 \frac{1}{t(t+2)} dt = \int_1^2 \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} \right) dt = [\ln t - \ln(t+2)]_1^2 = \ln 2 - \ln 4 + \ln 3 = \ln \frac{3}{2}$

2- نحسب  $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$

$A = \left[ e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \left[ e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[ e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - K$

$A = \frac{1}{2} \left( \left[ e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[ e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \dots\dots\dots$

3- نضع  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx$  ;  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx$

نحسب  $I+J$

$J + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (\cos^2 x + \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}$

نحسب  $I-J$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x dx = \left[ x^2 \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx$$

$$I - J = \left[ x^2 \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[ -x \frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\cos 2x}{2} dx$$

$$I - J = \frac{-\pi}{4} \quad \text{اذن} \quad I - J = \left[ x^2 \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[ -x \frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[ -\frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

**نستنتج I و J**

$$J = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8} \quad \text{و} \quad I = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} \quad \text{ومنه} \quad I + J = \frac{\pi^3}{24} \quad \text{و} \quad I - J = \frac{-\pi}{4}$$

### تمرين 5

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = e^x(1 - e^x)$

1- حدد  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2- احسب  $f'(x)$  و أعط جدول تغيرات  $f$  و أنشئ  $C_f$

3- حدد المساحة  $A_k$  المحصور بين  $C_f$  و محور الأفاصل و المستقيمين المعرفين

بالمعادلتين  $x = 0$  ;  $x = k$  حيث  $k$  عدد حقيقي سالب ( يمكن اعتبار  $t = e^x$  )

4- حدد  $\lim_{k \rightarrow -\infty} A_k$

$$f(x) = e^x(1 - e^x)$$

4- نحدد  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x(1 - e^x) = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(1 - e^x) = -\infty$$

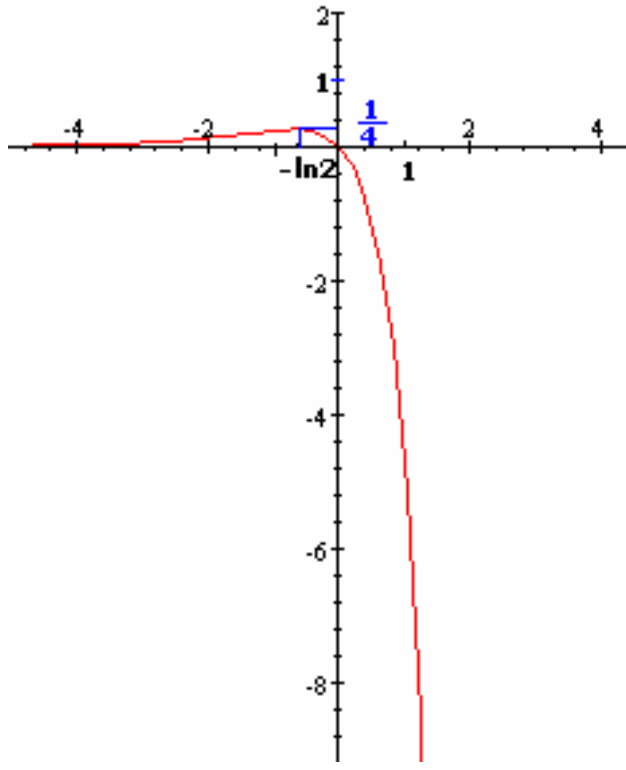
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}(1 - e^x) = -\infty ;$$

5- أنسب  $f'(x)$  و نعطي جدول تغيرات  $f$  و أنشئ  $C_f$

$$f'(x) = [e^x - e^{2x}]' = e^x - 2e^{2x} = e^x(1 - 2e^x)$$

جدول التغيرات

$x$	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$
$f$	$0$	$\frac{1}{4}$	$-\infty$



**6- نحدد المساحة  $A_k$**

$$A_k = \int_k^0 f(x) dx = \int_k^0 e^x - e^{2x} dx$$

$$A_k = \left[ e^x - \frac{1}{2} e^{2x} \right]_k^0 = \frac{1}{2} - e^k + \frac{1}{2} e^{2k}$$

**4- حدد**  $\lim_{k \rightarrow -\infty} A_k$

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} A_k = \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} - e^k + \frac{1}{2} e^{2k} = \frac{1}{2}$$

## تمارين

### تمرين 1

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 3\} \quad \frac{-3x^2 + 7x + 2}{x^2 - 2x - 3} = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-3} \quad \text{حدد } a ; b ; c \text{ حيث}$$

$$\int_0^2 \frac{-3x^2 + 7x + 2}{x^2 - 2x - 3} dx \quad \text{أحسب}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx \quad \text{و} \quad \int_0^1 \frac{x^4 + x^2 + 3}{x^2 + 1} dx \quad \text{أحسب}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{بين أن}$$

$$\int_0^x \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} dt \quad \text{أحسب}$$

### تمرين 2

$$\int_0^{\ln 2} (x+2)e^{2x} dx \quad \int_0^1 x^2 \ln(x^2+1) dx ; \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \quad \text{أحسب بالأجزاء}$$

$$\text{و} \quad \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$$

2- حدد الدالة الأصلية لـ  $x \rightarrow \sin^3 x$  التي تنعدم في 0 على  $\mathbb{R}$  ثم أحسب  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^3 dx$

### تمرين 3

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx \text{ نعتبر}$$

1- أحسب  $I_1$

2- بين  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_{n+1} = e - (n+1)I_n$  باستعمال المكاملة بالأجزاء.

3- أحسب  $I_2$   $I_3$

$$4- \text{ أستنتج } \int_0^1 (x^3 + 2x^2 - 2x) e^x dx$$

### تمرين 4

$$1- \text{ بين أن } \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 1 - x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$$

$$2- \text{ استنتج } \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

$$3- \text{ استنتج تأطيرا لـ } \int_0^1 \ln(1+x^2) dx \text{ إلى } ]0,1[.$$

### تمرين 9

$$1- \text{ تحقق أن } \forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1}$$

2- نعتبر  $k \in [0;1]$ .

$$A_k = \int_k^1 \frac{2x \ln x}{(x^2+1)^2} dx \text{ أحسب باستعمال المكاملة بالأجزاء}$$

$$\text{حدد } \lim_{x \rightarrow 0} A_k$$

### تمرين 10

$$1- \text{ أ- تأكد أن } \frac{t^2 - t + 1}{t(t^2+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2+1}$$

$$\text{ب- أحسب } \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2 - t + 1}{t(t^2+1)} dt$$

$$2- \text{ أحسب } \int_0^1 (3x^2 + 2x + 1) \ln(x+1) dx \text{ باستعمال المكاملة بالأجزاء}$$

### تمرين 11

$$1- \text{ تأكد أن } \forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

$$2- \text{ أحسب } I(\alpha) = \int_{\alpha}^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx \text{ باستعمال المكاملة بالأجزاء حيث } \alpha \in ]0;1[$$

$$3- \text{ أحسب } \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I(\alpha)$$

### تمرين 12

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx \quad ; \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx \quad \text{و} \quad n \in \mathbb{N}^* \quad \text{نعتبر}$$

1- أحسب  $I_1$  واستنتج  $I_3$  ;  $I_5$

2- أحسب  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x dx$  واستنتج  $I_{n+2} - I_n$  بدلالة  $n$ .

3- أ- بين أن الدالة  $x \rightarrow \ln \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$  دالة أصلية للدالة  $x \rightarrow \frac{1}{\cos x}$  على  $\left[ 0; \frac{\pi}{3} \right]$   
 ب- استنتج  $I_0$  ثم  $I_2$  ;  $I_4$