تمرين 1

1- حدد الشكل الجبري لكل من الأعداد العقدية $\frac{1}{2-3i}$; $\frac{3-2i}{2+i}$; $\frac{2i}{3-i}+\frac{(1-2i)^2}{i}$

2- أحسب $(1+i)^2$ واستنتج $(1+i)^{230}$

3- أحسب $\sum_{k=0}^{k=521} i^k$

تمرين 2

في المستوى العقدي نعتبر النقط $A(1)$ و $B(z)$ و $C(-iz)$

1- نضع $z=x+iy$ حيث $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ و $i\neq z$ و $z\neq 1$

حدد الشكل الجبري للعددين $\frac{1-z}{1+iz}$ و $\frac{1-i\cdot\overline{z}}{i+i\cdot\overline{z}}$

2- حدد (E) مجموعة النقطB حيث A وB وC نقــط مستقيمـية

3- حدد مجموعة النقط B حيث $\frac{1-i\cdot\overline{z}}{i+i\cdot\overline{z}}$ عدد تخيلي صرف.

تمرين 3

حل في $\mathbb{C}$ المعـادلات التالية $-2i\cdot\overline{z}+z=1$ و $(1-i)z-2\overline{z}=1-5i$

و $z\cdot\overline{z}+\overline{z}=4-3i$ و $2|z|^2-z^2=3$

تمرين 4

في المستوى العقدي حدد مجموعة النقط M(z) في كــل حالة من الحالتين التاليتين

1- $|z-1+i|=3$ 2- $|z-2|=|z+2i|$

تمرين 5

أكتب على الشكل المثلثي الأعداد عقديـــة $3+i\sqrt{3}$ و $\frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}}$ و $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{24}$

تمرين 6

نعتبر العددين العقدين $v=\sqrt{6}+i\sqrt{2}$ و $u=2-2i$

1- احسب معيار وعمدة كل من u و v

2- حدد الكتابة الجبرية والكتابة المثلثية لـ $\frac{u}{v}$ ثم استنتـج $\sin\frac{7\pi}{12}$; $\cos\frac{7\pi}{12}$

تمرين 7

نضع $u=-2+2i$

1- أحسب معيار و عمدة u

2- حل جبريا $z^2=u$ و استنتج $\sin\frac{3\pi}{8}$; $\cos\frac{3\pi}{8}$

تمرين 8

نعتبر العــدد العقـدي $z=1+i\sqrt{3}$

بين أن النقط $A(z)$ و $B(-z)$ و $C(z^2)$ و $D\left(\frac{2}{z}\right)$ متداورة

تمرين9

-1 ليكن $z_0=\left[1;\frac{2\pi}{5}\right]$. نضع $\alpha=z_0+z_0^4$ و $\beta=z_0^2+z_0^3$

أ- بين أن $1+\alpha+\beta=0$

ب- استنتج أن α و β حلي المعادلة $x^2+x-1=0$

-2 أ- حدد α بدلالة $\cos\frac{2\pi}{5}$

ب- حل المعادلة $x^2+x-1=0$ واستنتج $\cos\frac{2\pi}{5}$

ج- أنشئ النقط $A_0(1)$ و $A_1(z_0)$ و $A_2(z_0^2)$ و $A_3(z_0^3)$ و $A_4(z_0^4)$

حدد طبيعة $A_0A_1A_2A_3A_4$

تمرين10

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط I ; A ; B التي ألحاقها على التوالي هي 1 ; $1-2i$; $-2+2i$. لتكن (C) الدائرة التي أحد أقطارها هو $[AB]$.

1) أنشئ النقط I ; A ; B.

2) حدد z_Ω لحق النقطة Ω مركز الدائرة (C) . احسب شعاع الدائرة (C) .

3) لتكن D النقطة ذات اللحق $z_D=\frac{3+9i}{4+2i}$.

حدد الشكل الجبري للعدد z_D ثم بين أن النقطة D تنتمي للدائرة (C) .

3) لتكن E ، النقطة ذات اللحق z_E، التي تنتمي للدائرة (C) و التي تحقق $\overline{\left(\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega E}\right)}\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

4) أ ـ حدد معيار و عمدة العدد $z_E+\frac{1}{2}$.

ب ـ استنتج أن $z_E=\frac{5\sqrt{2}-2}{4}+\frac{5\sqrt{2}}{4}i$

تمرين11

-1 بين أن $1+e^{i\theta}=2e^{i\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}$

-2 $\theta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$. أحسب بدلالة $\tan\theta$ العدد $z=\frac{e^{i2\theta}-1}{e^{i2\theta}+1}$

تمرين12

بين أن $e^{i\frac{\pi}{11}}+e^{i\frac{3\pi}{11}}+e^{i\frac{5\pi}{11}}+e^{i\frac{7\pi}{11}}+e^{i\frac{9\pi}{11}}=\frac{ie^{-i\frac{\pi}{22}}}{2\sin\frac{\pi}{22}}$

استنتج $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$

تمرين13

ليكن $(z;z')\in\mathbb{C}^2$. بين أن $|z-z'|^2\leq\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)$

تمرين14

ليكن $(x;\alpha)\in\mathbb{R}^2$

أحسب $S_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(x+k\alpha)$ و $C_n=\sum_{k=0}^{n}\sin(x+k\alpha)$ (يمكن حساب C_n+iS_n)

تمرين15

اختصر الكتابة $C_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$

تمرين16

ليكن $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

نعتبر المعادلة (E): $(1+iz)^3(1-i\tan\alpha)=(1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$ $z\in\mathbb{C}$

1- ليكن z_0 حل للمعادلة (E)

أ- بين أن $|1+iz_0|=|1-iz_0|$

ب- استنتج أن z_0 عدد حقيقي

2- أ- أحسب $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ بدلالة $e^{i\alpha}$

ت- نضع $z=\tan\theta$ حيث $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. استنتج حلول المعادلة (E)

تمرين 17

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E):\quad z^2+2(1+\cos\theta)z+2(1+\cos\theta)=0$ حيث $\theta\in]-\pi;\pi[$

1- حل المعادلة (E)

2- أحسب معيار و عمدة جدري المعادلة (E) (ناقـش حسب قيم θ)

1- $(z-1)^6+(z-1)^3+1=0$

تمرين18

لكل عدد عقدي مخالف لـ i نضع $u=\frac{\bar{z}(z-i)}{\bar{z}+i}$

1- اثبت أن $\forall z\in\mathbb{C}-\{i\}:\arg u\equiv-\arg z+2\arg(z-i)\quad[2\pi]$ و أن $|u|=|z|$

2- بين إذا كان $|z|=1$ فان $u=-i$

3- حدد مجموعة النقط M(z) حيث u تخيلي صرف.

تمرين19

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) : $z^2+z+1=0$

2) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (F): $z^2=\bar{z}$

أ- بين أنه إذا كان z حلا للمعادلة (F) فإن $z=0$ أو $|z|=1$.

ب- بين أن المعادلة (F) تكافئ المعادلة : $z^3=1$ أو $z=0$.

3) حل المعادلة (F) في $\mathbb{C}$.

تمرين 20

1. حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8z+17=0$.

2. نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ الحدودية $P(z)=z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i$.

a. بين أن الحدودية $P(z)$ تقبل حلا تخيليا صرفا وحيدا .

b. حدد الأعداد الحقيقية a ; b ; c حيث : $P(z)=(z-2i)\left(az^2+bz+c\right)$.

c. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

تمرين21

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A و B و C و D و E اللتي ألحقاها على التوالي هي : $z_A=1-i$ و $z_B=3+i$ و $z_C=-3$ و $z_D=2$ و $z_E=-4$.

نعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' ذات الحق z' بحيث: $z'=(1+i)z+1$.

1) حدد A' و B' صورتي النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي.

2) أ ـ بين أن $OMEM'$ متوازي الأضلاع إذا، و فقط إذا، كان $z^2-3z+3=0$.

ب ـ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-3z+3=0$.

3) أ ـ عبر عن $z'+4$ بدلالة $z-2$.

ب ـ استنتج أن $|z'+4|=|z-2|^2$ ثم عبر $\arg(z'+4)$ بدلالة $\arg(z-2)$.

ج ـ بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D و شعاعها 2 فإن النقطة M' صورة النقطة بالتطبيق f تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها.

تمرين22

نعتبر المعادلة (E) التالية: $(E):\quad z\in\mathbb{C}\quad z^2\cos^2 t-4z\cos t+5-\cos^2 t=0$ حيث $t\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

1- حل المعادلة (E)

2- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$

M_1 و M_2 هما صورتا حلي المعادلة (E) في المستوى العقدي

حدد مجموعة النقط M_1 و M_2 عندما يتغير t في $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ و أنشئها في المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$

تمرين23

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $z_A=4+i$; $z_B=4-i$; $z_C=-i$

1. مثل النقط A و B و C .

2. لتكن Ω النقطة ذات اللحق 2 . نسمي S صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$. حدد لحق النقطة S .

3. بين أن النقط B و A و S و C تنتمي إلى نفس دائرة (Γ) ينبغي تحديد مركزها و شعاعها .

أرسم (Γ).

تمرين24

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي هما : $z_A=i$; $z_B=2$

I.

1) حدد لحق النقطة B_1 صورة النقطة B بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته $\sqrt{2}$.

2) حدد لحق النقطة B' صورة النقطة B_1 بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

3) مثل النقط A و B و B' .

II.

نعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' ذات الحق z' بحيث: $z'=(1+i)z+1$.

1) حدد A' و B' صورتي النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي.

2) أ ـ بين أنه $\frac{z'-z}{i-z}=-i$ لكل z مخالف للعدد i.

ب ـ بين أن : $\begin{cases} MM' = MA \\ \left(\overline{MA}, \overline{MM'}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ لكل نقطة M مخالفة للنقط A .

ج ـ استنتج طريقة لإنشاء النقطة M' انطلاقا من النقطة M حيث $M \neq A$.

3) حدد (Γ) مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث : $|z-2| = \sqrt{2}$.

4) أ ـ بين أن : $(1+i)(z-2) = z' - 3 - 2i$ لكل عدد عقدي z .

ب ـ استنتج أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى (Γ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها

تمرين25

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ ، نعتبر النقط :

- النقطة A ذات اللحق $a = 7 - i\sqrt{3}$.
- النقطة B ذات اللحق $b = 5 + 3i\sqrt{3}$.
- النقطة Q منتصف القطعة [OB] .

1) أ ـ ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$. حدد الكتابة العقدية للدوران R .

ب ـ بين أن $R(A) = B$ ثم استنتج طبيعة أن المثلث OAB.

2) حدد q لحق النقطة Q .

3) حدد k لحق النقطة K بحيث يكون ABQK متوازي الأضلاع .

4) بين أن $\frac{k-a}{k}$ تخيلي صرف . ما ذا نستنتج بالنسبة للمثلث OKA ؟

5) لتكن C النقطة ذات اللحق $c = \frac{2a}{3}$ ؟

أ ـ أحسب $\frac{k-b}{k-c}$.

ب ـ ما ذا نستنتج بالنسبة للنقط B و C و K ؟

تمرين26

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية كل من المعادلتين التاليتين :

أ ـ $z^4 = 1$ (يمكن ملاحظة أن $z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1)$)

ب ـ $\left(\frac{z - i}{z + i}\right)^4 = 1$

2) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و ليكن A عددا عقديا .

نعتبر المعادلة ذات المجهول العقدي z : $\left(\frac{z - i}{z + i}\right)^n = A$. (E) .

P و Q و M هي النقط ذات الألحاق i و $-i$ و z على التوالي .

أ ـ بين أنه إذا كان z حل للمعادلة (E) فإن $\sqrt[n]{|A|} = \frac{MP}{MQ}$.

ب ـ بين أنه إذا كان للمعادلة (E) حل حقيقي على الأقل فإن $|A| = 1$.

ج ـ استنتج أنه إذا كان للمعادلة (E) حل حقيقي فإن جميع حلولها حقيقية .

تمرين27

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم . $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B اللتان لحقاهما على التوالي هما : $z_A = 1$; $z_B = -2$.

نربط كل عدد عقدي z مخالف ل -2 بالعدد Z المعرف ب : $Z = \frac{z - 1}{z + 2}$.

1) حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z في كل من الحالتين التاليتين :

أ ـ $|Z| = 1$ ب ـ $Z \in \mathbb{R}$

2) أ ـ بين أنه لكل z مخالف ل -2 لدينا : $(Z - 1)(z + 2) = -3$

ب ـ نعتبر النقطة M ذات اللحق z و النقطة M' التي لحقها Z .

بين أن : $A \neq M'$ ثم حدد $AM' \times BM$ و $\overline{(\vec{u}, \overrightarrow{AM'})} + \overline{(\vec{u}, \overrightarrow{BM})}$.

ج ـ علما أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها B و شعاعها 3 بين أن M' تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها .

3) أ ـ حدد (Γ) مجموعة النقط M ذات اللحق z حيث $Z \in i\mathbb{R}$.

ب ـ لكل عدد حقيقي غير منعدم x نضع $d = \frac{1+2ix}{1-ix}$ و نسمي D النقطة ذات اللحق d .

حدد الشكل الجبري للعدد $\frac{d-1}{d+2}$ ثم استنتج أن النقطة D تنتمي ل (Γ) .

ج ـ ليكن θ عنصرا من المجال $]-\pi, \pi]$. نضع $f = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{i\theta}$ و نسمي F النقطة ذات اللحق f .

* بين أن العدد $U = \frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ تخيلي صرف .

* بين أن $\frac{f-1}{f+2} = U$. ماذا نستنتج بالنسبة للنقطة F ؟

تمرين 28

في المستوى (P) العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$،

ليكن f التطبيق من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ المعرف بـ

$$\begin{cases} f(z) = \dfrac{2z(z+\bar{z})}{(z-\bar{z})^2} & ; \quad z \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \\ f(z) = 0 & ; \quad z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

و ليكن F التطبيق في المستوى (P) الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بنقطة $M'(f(z))$

1- أثبت أن النقط O و M وM' مستقيمية

2- بين أن مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق هي الشلجم (Γ) الذي معادلته $y^2 = -x$

3- نضع $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث $r \in \mathbb{R}_+^*$ و $\theta \in]-\pi;\pi[- \left\{-\frac{\pi}{2};0;\frac{\pi}{2}\right\}$

أ- حدد، حسب قيم θ معيار و عمدة العدد $f(z)$

ب- أكتب بدلالة θ ، الصيغة الجبرية للعدد $f(z)$

ج- بين أن صورة المستوى (P) بالتطبيق F هو الشلجم (Γ)

4- أعط طريقة لانشاء صورة M بالتطبيق F

تمرين 29

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$. لتكن $A(-2+3i)$ و $B(1-3i)$ نقطتين.

نعتبر $M(z)$ حيث $z \neq -2+3i$ نضع $z' = \frac{z-1+3i}{z+2-3i}$

1- أ- حدد علاقة بين عمدة z' و الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})$

ب- حدد و أنشئ المجموعتين

$$(E_1) = \left\{M(z) / \arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]\right\}$$

$$(E_2) = \left\{M(z) / |z'| = 2\right\}$$

2- حدد لحق النقطة المشتركة K للمجموعتين E_1 و E_2