الأعداد العقدية

مبرهنة

توجد مجموعة $\mathbb{C}$ تتضمن $\mathbb{R}$ و تحقق:

i) يحتوي $\mathbb{C}$ على عنصر غير حقيقي i و يحقق $i^2=-1$

ii) كل عنصر من $\mathbb{C}$ يكتب بكيفية و حيدة على الشكل: $a+ib$ بحيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

iii) المجموعة $\mathbb{C}$ مزودة بعمليتي الجمع و الضرب تمددان نفس العمليتين في $\mathbb{R}$ و لهما نفس الخاصيات

ملاحظة:

* $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathrm{ID}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

خاصية ليكن $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ و $(a';b')\in\mathbb{R}^2$ $\qquad a+ib=a'+ib' \Leftrightarrow a=a'$ و $b=b'$

برهان

* $a=a'$ و $b=b' \Rightarrow a+ib=a'+ib'$ استلزام صحيح

* نعتبر $a+ib=a'+ib'$ و منه $i(b-b')=a'-a$

لنفترض أن $b\neq b'$ ومنه $i=\dfrac{a'-a}{b-b'}$

و حيث أن $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ و $(a';b')\in\mathbb{R}^2$ فان $\dfrac{a'-a}{b-b'}\in\mathbb{R}$

و بالتالي $i\in\mathbb{R}$ و هذا غير صحيح لان i عدد غير حقيقي

إذن افتراضنا خاطئ و منه $b=b'$ و بالتالي $a'-a=0$ إذن $a'=a$

اصطلاحات و تعاريف

* ليكن عدد عقدي $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

العدد a يسمى الجزء الحقيقي نكتب $\mathrm{Re}(z)=a$.

العدد b يسمى الجزء التخيلي نكتب $\mathrm{Im}(z)=b$

- نقول إن عددا عقديا عدد تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان جزئه الحقيقي منعدما و جزئه تخيلي غير منعدم
- نقول إن عددا عقديا عدد حقيقي إذا وفقط إذا كان جزئه التخيلي منعدما

أمثلة

حدد الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي للعدد العقدي z في الحالات التالية

أ/ $z=\sqrt{2}-3i$ $\qquad$ ب/ $z=5i-3$ $\qquad$ ج/ $z=2\sqrt{3}i$ $\qquad$ د/ $z=17$

العمليات

ليكن عددين عقديين $z=a+ib$ و $z=a'+ib'$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ و $(a';b')\in\mathbb{R}^2$

* الجمع $\qquad z+z'=(a+a')+(b+b')i$

* الضرب $\qquad z\cdot z'=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i$

* مقلوب عدد عقدي غير منعدم $\qquad \dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{bi}{a^2+b^2}$

* خارج عددين عقديين $\qquad \dfrac{z}{z'}=\dfrac{a-bi}{a'+b'i}=\dfrac{(a+bi)(a'-b'i)}{a'^2+b'^2}$ حيث $z'\neq 0$

* $(a+ib)^2=(a^2-b^2)+2abi$ $\qquad (a-ib)^2=(a^2-b^2)-2abi$ $\qquad (a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$

* خاصيات العدد العقدي i

ليكن $n\in\mathbb{Z}$

$i^n=1$ إذا كان $n=4k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

$i^n=i$ إذا كان $n=4k+1$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

$i^n=-1$ إذا كان $n=4k+2$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

$i^n=-i$ إذا كان $n=4k+3$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تمرين

-1 نحدد الشكل الجبري لكل من الأعداد العقدية $\frac{1}{2-3i}$; $\frac{3-2i}{2+i}$; $\frac{2i}{3-i}+\frac{(1-2i)^2}{i}$

$$\frac{1}{2-3i}=\frac{2-3i}{(2-3i)(2-3i)}=\frac{2-3i}{4+9}=\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i$$

$$\frac{3-2i}{2+i}=\frac{(3-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{6-2-3i-4i}{5}=\frac{4}{5}-\frac{7}{5}i$$

$$\frac{2i}{3-i}+\frac{(1-2i)^2}{i}=\frac{2i(3+i)}{10}-i(1-4-4i)=\frac{3}{5}i-\frac{1}{5}+3i-4=-\frac{21}{5}+\frac{18}{5}i$$

-2 نحسب $(1+i)^2$ و نستنتج $(1+i)^{230}$

$$(1+i)^2=2i$$

$$(1+i)^{230}=(2i)^{115}=2^{115}i^{4\times28+3}=-2^{115}i$$

-3 نحل المعادلة $2iz-3i+2=z+i$ $z\in\mathbb{C}$

$$2iz-3i+2=z+i\Leftrightarrow(1+2i)z=-2+4i$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-2+4i}{1+2i}=\frac{-2(1-2i)(1-2i)}{5}=\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i$$

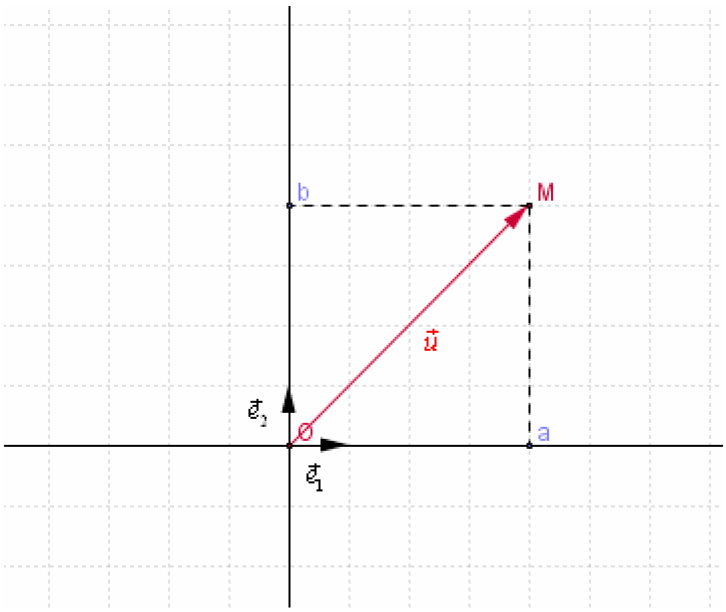
إذن $S=\left\{\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i\right\}$

1- التمثيل الهندسي لعدد عقدي

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$.

كل نقطة $M(a;b)\in(P)$ هي صورة عدد عقدي وحيد $z=a+ib$ وهذا الأخير يسمى لحق M ونكتب $M(z)$ أو $z=aff(M)$

العدد العقدي $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ يسمى أيضا لحق المتجهة $\vec{u}(a;b)$ نكتب $z=aff(\vec{u})$



-* لحق $\overrightarrow{AB}$

ليكن A و B لحقيهما $z_A=a+ib$ و $z_B=a'+ib'$ على التوالي

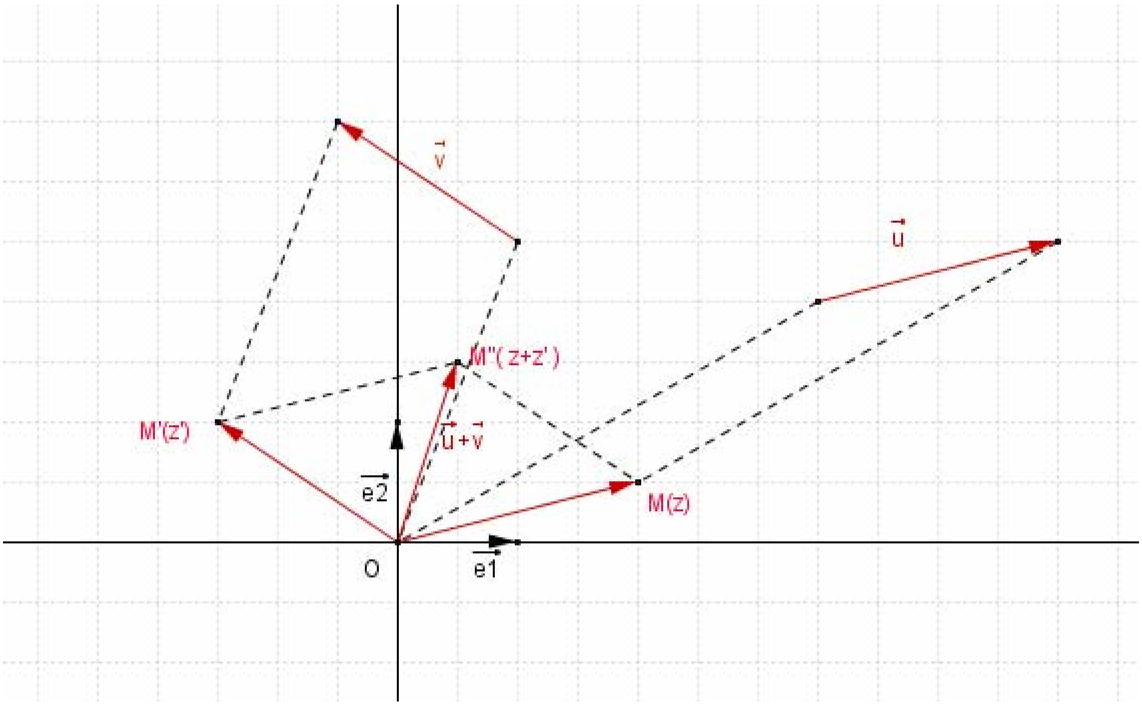
ومنه $A(a;b)$ و $B(a';b')$ و بالتالي $\overrightarrow{AB}(a'-a;b'-b)$ أي

$$aff(\overrightarrow{AB})=(a'-a)+i(b'-b)=(a'+ib')-(a+ib)=z_B-z_A$$

لحق $\overrightarrow{AB}$ هو z_B-z_A حيث $A(z_A)$ و $B(z_B)$

*- لحق $\vec{u}+\vec{v}$

نعلم أن اذا كان $\vec{u}(a;b)$ و $\vec{v}(a';b')$ فان $\vec{u}+\vec{v}(a+a';b+b')$ ومنه $aff(\vec{u}+\vec{v})=aff(\vec{u})+aff(\vec{v})$



لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من المستوى $\quad aff(\vec{u}+\vec{v})=aff(\vec{u})+aff(\vec{v})$

*- استقامية النقط

النقط المختلفة $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ مستقيمية $\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R} \ / \ \overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R} \ / \ aff\left(\overrightarrow{AB}\right)=aff\left(\lambda\overrightarrow{AC}\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R} \ / \ z_B-z_A=\lambda(z_C-z_A)$$

$$\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R} \ / \ \frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\lambda$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\in\mathbb{R}$$

تكون النقط المختلفة $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ مستقيمية إذا و فقط إذا كان $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\in\mathbb{R}$

*- المرجح

لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $G(z_G)$ نقط من المستوى العقدي و α و β عددين حقيقين حيث $\alpha+\beta\neq 0$

G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ إذا و فقط إذا كان $(\alpha+\beta)z_G=\alpha z_A+\beta z_B$

ملاحظة

بنفس الطريقة نعرف مرجح ثلاث نقط أو أكثر

تمرين

بين أن النقط $A(1+i)$ و $B(1+3i)$ و $C\left(\frac{-1}{2}-2i\right)$ مستقيمية

الجواب

لدينا $\frac{\left(-\frac{1}{2}-2i\right)-(1+i)}{(2+3i)-(1+i)}=\frac{\frac{-3-6i}{2}}{1+2i}=\frac{(-3-6i)(1-2i)}{2(1+2i)(1-2i)}=\frac{-3+6i-6i-12}{10}=-\frac{3}{2}\in\mathbb{R}$

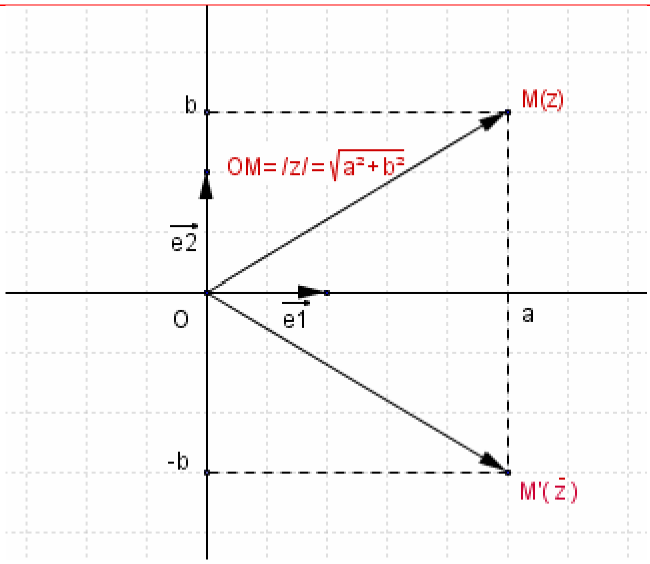
إذن A و B و C مستقيمية

2- المرافق و المعيار

تعريف

ليكن عدد عقدي $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$.

* العدد العقدي $z=a-ib$ يسمى مرافق العدد العقدي $z=a+ib$ ونرمز له بـ $\bar{z}=a-ib$.
* العدد الحقيقي $\sqrt{z\bar{z}}$ يسمى معيار العدد العقدي $z=a+ib$. نرمز له بـ $|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$



ملاحظة

* النقطتان $M(z)$ و $M'(\bar{z})$ متماثلتان بالنسبة لمحو الافاصيل

* إذا كان $z=a-ib$ فان $z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$

ليكن عددين عقديين $z=a+ib$ و $z=a'+ib'$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ و $(a';b')\in\mathbb{R}^2$

$$\overline{z+z'}=\overline{(a+a')+(b+b')i}=a+a'-(b+b')i=a-ib+a'-ib'=\bar{z}+\bar{z'}$$

$$\overline{z\cdot z'}=\overline{(aa'-bb')+(ab'+a'b)i}=aa'-bb'-ab'i-a'bi=a(a'-b'i)-bi(a'-b'i)=(a-bi)(a'-b'i)=\bar{z}\cdot\bar{z'}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\overline{\left(\frac{1}{a+bi}\right)}=\overline{\left(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{bi}{a^2+b^2}\right)}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}i$$

$$\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{a-ib}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}i$$

ومنه $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}}$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\overline{\left(z\times\frac{1}{z'}\right)}=\bar{z}\times\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\bar{z}\times\frac{1}{\bar{z'}}=\frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$$

خاصيات

لتكن $(z;z')\in\mathbb{C}^2$ و $\alpha\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{Z}^*$

* $\bar{\bar{z}}=z$
* $z-\bar{z}=2\operatorname{Im}(z)i$; $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}(z)$
* $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\bar{z}=z$
* $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\bar{z}=-z$
* $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}$ $\quad\overline{z.z'}=\bar{z}.\bar{z'}$ $\quad\overline{z^n}=(\bar{z})^n$ $\quad\overline{\alpha z}=\alpha.\bar{z}$ $\quad z'\neq0$ $\quad\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

خاصيات

لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ نقطتين من المستوى العقدي منسوب إلى المعلم $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$.

$\|\overrightarrow{AB}\|=AB=|z_B-z_A|$ $\qquad OA=|z_A|$

لتكن $(z;z')\in\mathbb{C}^2$ و $\alpha\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{Z}^*$

$|z|=0 \Leftrightarrow z=0$ *

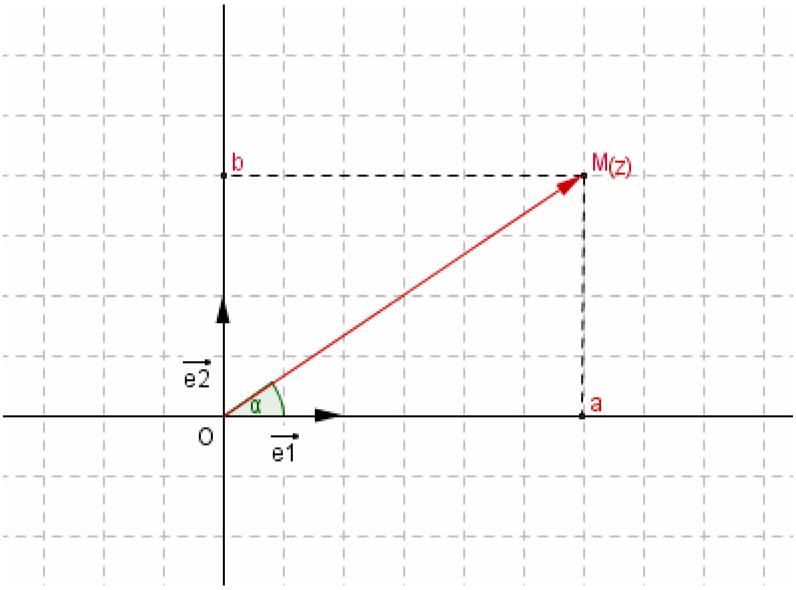
* $|z|=|-z|=|\overline{z}|$

* $|z.z'|=|z||z'|$ $\quad |z^n|=|z|^n$ $\quad \left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ $\quad z'\neq 0$

* $|z+z'|\leq|z|+|z'|$

3- الشكل المثلثي لعدد عقدي و العمدة

أ/ العمدة لعدد عقدي



المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$

ليكن $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ عددا عقديا غير منعدم و النقطة M صورته , وليكن α قياسا للزاوية $(\widehat{\vec{e}_1,\overrightarrow{OM}})$.

العدد α يسمى عمدة للعدد العقدي z و نكتب $\arg z\equiv\alpha\quad[2\pi]$.

ملاحظة

* $\forall a\in\mathbb{R}^{+*}\quad \arg a\equiv 0\quad[2\pi]$ $\qquad \forall a\in\mathbb{R}^{-*}\quad \arg a\equiv\pi\quad[2\pi]$

* $\forall b\in i\mathbb{R}^{+*}\quad \arg b\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ $\qquad \forall b\in i\mathbb{R}^{-*}\quad \arg b\equiv-\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$

ب/ الكتابة المثلثية لعدد عقدي

-* ليكن $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ عددا عقديا غير منعدم و r عددا حقيقيا موجبا قطعا و α عددا حقيقيا نضع $|z|=r=\sqrt{a^2+b^2}$

و منه $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ حيث $\sin\alpha=\frac{b}{r}$; $\cos\alpha=\frac{a}{r}$

إذن $[2\pi]$ $\arg z\equiv\alpha$

الكتابة $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ تسمى الشكل المثلثي للعدد العقدي z و نكتب $z=[r,\alpha]$

أمثلة

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$$

$$-2i=\left[2;-\frac{\pi}{2}\right]\qquad 15=[15;0]$$

$$-\sqrt{3}-i=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\left[2;\frac{5\pi}{6}\right]$$

ج/ خاصيات

ليكن $z=[r,\alpha]$ و $z'=[r',\alpha']$ عددين عقديين غير منعدمين

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\alpha'+i\sin\alpha')=(\cos\alpha\cos\alpha'-\sin\alpha\sin\alpha')+i(\sin\alpha\cos\alpha'+\cos\alpha\sin\alpha')$$

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\alpha'+i\sin\alpha')=\cos(\alpha+\alpha')+i\sin(\alpha+\alpha')$$

$$z\times z'=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\times r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')=rr'(\cos(\alpha+\alpha')+i\sin(\alpha+\alpha'))=[rr';\alpha+\alpha']$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\cos\alpha+i\sin\alpha}\right)=\frac{1}{r}\left(\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}\right)=\frac{1}{r}(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha))=\left[\frac{1}{r};-\alpha\right]$$

$$\frac{z}{z'}==z\times\frac{1}{z'}=[r;\alpha]\times\left[\frac{1}{r'};-\alpha'\right]=\left[\frac{r}{r'};\alpha-\alpha'\right]$$

$$\overline{z}=\overline{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=r(\cos\alpha-i\sin\alpha)=r(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha))=[r,-\alpha]$$

$$-z=r(-\cos\alpha-i\sin\alpha)r(\cos(\alpha+\pi)+i\sin(\alpha+\pi))=[r,\alpha+\pi]$$

نبين أن $z^n=[r^n;n\alpha]$ $\quad\forall(z;n)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{Z}$

ليكن $z=[r;\alpha]$ عدد عقدي غير منعدم

لنبين أولا $z^n=[r^n;n\alpha]$ $\quad\forall(z;n)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{N}$

من أجل $n=0$ لدينا $z^0=1$ و $1=[1;0]=[1;0\times\alpha]$ اذن العبارة صحيحة من أجل $n=0$

لنفترض أن $z^n=[r^n;n\alpha]$ و نبين أن $z^{n+1}=[r^{n+1};(n+1)\alpha]$

$$z^{n+1}=z\times z^n=[r;\alpha]\times[r^n;n\alpha]=[r\times r^n;\alpha+n\alpha]=[r^{n+1};(n+1)\alpha]$$

إذن $z^n=[r^n;n\alpha]$ $\quad\forall(z;n)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{N}$

ليكن $n\in\mathbb{Z}^-$ ومنه $-n\in\mathbb{N}$

$$z^n=\frac{1}{z^{-n}}=\frac{1}{[r^{-n};-n\alpha]}=\left[\frac{1}{r^{-n}};-(-n\alpha)\right]=[r^n;n\alpha]$$

إذن $z^n=[r^n;n\alpha]$ $\quad\forall(z;n)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{Z}$

خاصيات

ليكن $z=[r,\alpha]$ و $z'=[r',\alpha']$ عددين عقديين غير منعدمين

* $z=z'\Leftrightarrow r=r'\quad et\quad\alpha=\alpha'$

* $\arg(zz')\equiv\arg z+\arg z'\quad[2\pi]$ و $\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv-\arg z\quad[2\pi]$ و $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv\arg z-\arg z'\quad[2\pi]$

$zz'=[rr',\alpha+\alpha']$ و $\frac{1}{z}=\left[\frac{1}{r};-\alpha\right]$ و $\frac{z}{z'}=\left[\frac{r}{r'},\alpha-\alpha'\right]$

* $\arg(\overline{z})\equiv-\arg z\quad[2\pi]$ و $\arg(-z)\equiv\pi+\arg z\quad[2\pi]$

$\overline{z}=[r,-\alpha]$ و $-z=[r,\alpha+\pi]$

* $\arg(z^n)\equiv n\arg z\quad[2\pi]\quad\forall(z;n)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{Z}$

$z^n=[r^n;n\alpha]\quad\forall(z;n)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{Z}$

توجد نقطة وحيدة M حيث $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$ ومنه $M(z_B-z_A)$

و بالتالي $[2\pi]$ $\arg(z_B-z_A)=(\overline{\vec{e}_1;\overrightarrow{OM}})$

إذن $[2\pi]$ $\arg(z_B-z_A)=(\overline{\vec{e}_1;\overrightarrow{AB}})$

$$\overline{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)} \equiv \overline{\left(\vec{e}_1;\overrightarrow{AC}\right)} - \overline{\left(\vec{e}_1;\overrightarrow{AB}\right)} \qquad [2\pi]$$

$$\overline{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)} \equiv \left(\arg z_C - \arg z_A\right) - \left(\arg z_B - \arg z_A\right) \qquad [2\pi]$$

$$\overline{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)} \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \qquad [2\pi]$$

خاصية

إذا كان $A(z_A) \neq B(z_B)$ و $D(z_D) \neq C(z_C)$ فان $\arg(z_B - z_A) = \overline{\left(\vec{e}_1;\overrightarrow{AB}\right)} \quad [2\pi]$

و $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \overline{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)} \quad [2\pi]$

د/ تطبيقات

* $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ نقط مختلفة

A و B و C مستقيمية $\Leftrightarrow \dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 \quad [2\pi]$ أو $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \pi \quad [2\pi]$

* $A(z_A) \neq B(z_B)$ و $D(z_D) \neq C(z_C)$

$$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad ou \quad \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

تمرين:

نضع $u_1 = 1 - i$; $u_2 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$

1- حدد عمدة و معيار u_1 و u_2

2- حدد عمدة و معيار $\dfrac{u_1}{u_2}$ و استنتج $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$

3- بين أن $\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right)^{24} = 1$

الحل

1- نحدد عمدة و معيار u_1 و u_2

$$u_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left[\sqrt{2};\frac{-\pi}{4}\right]$$

$$u_2 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \left[\sqrt{2};\frac{-\pi}{6}\right]$$

3- نحدد عمدة و معيار $\dfrac{u_1}{u_2}$ و نستنتج $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\left[\sqrt{2};\frac{-\pi}{4}\right]}{\left[\sqrt{2};\frac{-\pi}{6}\right]} = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}};\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right] = \left[1;\frac{-\pi}{12}\right]$$

لدينا $\dfrac{u_1}{u_2}=\dfrac{1-i}{\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{(2-2i)(\sqrt{6}+i\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(\sqrt{6}+i\sqrt{2})}$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})i$$

ومنه $\left[1;\dfrac{-\pi}{12}\right]=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}-(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2})i$

$\begin{cases}\cos\dfrac{-\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\dfrac{-\pi}{12}=-(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})\end{cases}$ إذن $\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{cases}$

3- نبين أن $\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right)^{24}=1$

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right)^{24}=\left[1;\frac{\pi}{12}\right]^{24}=\left[1;\frac{24\pi}{12}\right]=[1;2\pi]=1$$

تمرين

ليكن $\theta\in\mathbb{R}$ ، حدد معيار وعمدة الأعداد العقدية :

$a=-\cos\theta+i\sin\theta$; $b=\cos\theta-i\sin\theta$; $c=-\cos\theta-i\sin\theta$

$a'=\sin\theta+i\cos\theta$; $b'=\sin\theta-i\cos\theta$; $c'=-\sin\theta-i\cos\theta$; $d=-\sin\theta+i\cos\theta$

الجواب

ليكن $\theta\in\mathbb{R}$ ،

$$a=-\cos\theta+i\sin\theta=\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)=[1;\pi-\theta]$$

$$b=\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=[1;-\theta]$$

$$c=-\cos\theta-i\sin\theta=\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta)=[1;\pi+\theta]$$

$$d=-\sin\theta+i\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\left[1;\frac{\pi}{2}+\theta\right]$$

$$a'=\sin\theta+i\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\left[1;\frac{\pi}{2}-\theta\right]$$

$$b'=\sin\theta-i\cos\theta=\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\left[1;-\frac{\pi}{2}+\theta\right]$$

$$c'=-\sin\theta-i\cos\theta=\sin(\pi+\theta)+i\cos(\pi+\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\pi+\theta)\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-(\pi+\theta)\right)$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\left[1;-\frac{\pi}{2}-\theta\right]$$

تمرين

نعتبر $a=-4$ $z_1=2i$ و $z_1=2-2i$

1 – حدد الشكل المثلثي لـ a وz_1 و z_2

2– تحقق أن $a+z_1^2+z_2^4=-72$

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر $A(a)$ و$B(z_1)$ و $C(z_2)$

3- 1.3) بين أن BAC قائم الزاوية و متساوي الساقين في B

2.3) حدد المجموعة (F) حيث $(F)=\{M(z)/|z+1+i|=\sqrt{10}\}$

3.3) تحقق أن A و B و C تنتمي إلى (F) ثم أنشئ BAC و(F)

الحل

2 – نحدد الشكل المثلثي لـ a و z_1 و z_2

$$a=-4=[4;\pi] \quad \text{و} \quad z_1=2i=\left[2;\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{و} \quad z_2=2-2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left[2\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]$$

4.2 – نتحقق أن $a+z_1^{\,2}+z_2^{\,4}=-72$

$$\begin{aligned} a+z_1^{\,2}+z_2^{\,4} &=[4;\pi]+\left[2;\frac{\pi}{2}\right]^2+\left[2\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]^4 \\ &=[4;\pi]+[2;\pi]^2+\left[\left(2\sqrt{2}\right)^4;-\pi\right] \\ &=-4-4-\left(2\sqrt{2}\right)^4 \\ &=-4-4-64=-72 \end{aligned}$$

-3 (1.3 نبين أن BAC قائم الزاوية و متساوي الساقين في B

لدينا $A(-4)$ و $B(2i)$ و $C(2-2i)$

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right) &\equiv \arg\left(\frac{2-2i-2i}{-4-2i}\right)\equiv \arg\left(\frac{2-4i}{-4-2i}\right) \\ &\equiv \arg\left(\frac{i(-2i-4)}{-4-2i}\right)\equiv \arg(i)\equiv\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{aligned}$$

$$BA=|-4-2i|=\sqrt{20} \qquad BC=|2-4i|=\sqrt{20}$$

إذن المثلث BAC قائم الزاوية و متساوي الساقين في B

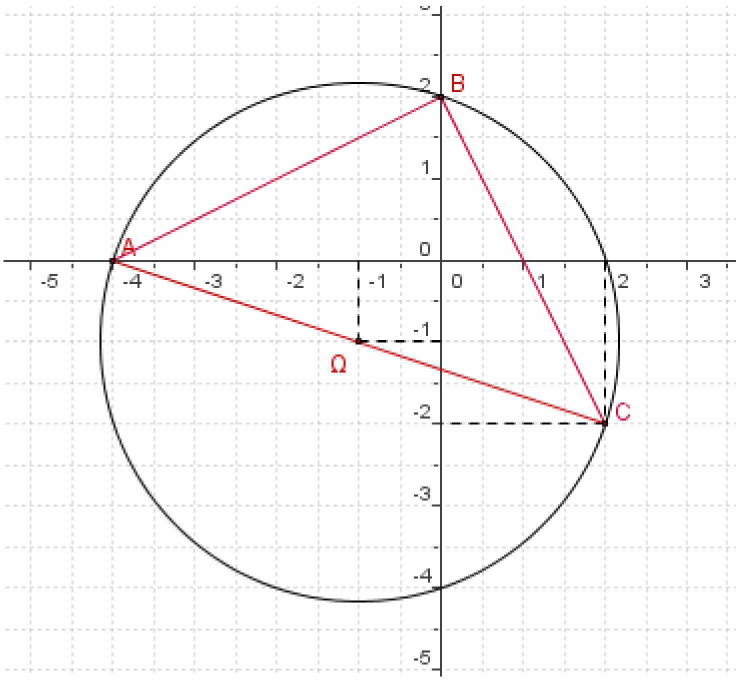
(2.3 نحدد المجموعة (F)

$$M(z)\in(F)\Leftrightarrow |z+1+i|=\sqrt{10}$$
$$M(z)\in(F)\Leftrightarrow \Omega M=\sqrt{10} \qquad /\,\Omega(1+i)$$
$$M(z)\in(F)\Leftrightarrow M\in C\left(\Omega;\sqrt{10}\right) \qquad /\,\Omega(-1;-1)$$
$$(F)=C\left(\Omega;\sqrt{10}\right) \qquad /\,\Omega(-1;-1)$$

(3.4 نتحقق أن $A(-4)$ و $B(2i)$ و $C(2-2i)$ تنتمي إلى (F) و ننشئ BAC و (F)

$$\Omega A=|-4+1+i|=|-3+i|=\sqrt{10}$$
$$\Omega B=|2i+1+i|=|1+3i|=\sqrt{10}$$
$$\Omega A=|2-2i+1+i|=|3-i|=\sqrt{10}$$

إذن A و B و C تنتمي إلى (F)



تمرين

في المستوى العقدي نعتبر النقط : $A(1+i)$ و B بحيث : $OA = OB$ و $[2\pi]$ $\qquad \overline{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} \equiv \frac{\pi}{3}$

1) اعط الشكل الجبري ل z_B.

2) احسب المسافة AB .

3) حدد القياس الرئيسي للزاوية الموجهة : $\widehat{(\vec{e_1},\overrightarrow{AB})}$

الجواب

1) نعطي الشكل الجبري ل z_B.

$$|z_B| = OB = OA = |1+i| = \sqrt{2}$$

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$$ و منه $$\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

$$\arg(z_B) \equiv \overline{(\vec{e}_1;\overrightarrow{OB})} \equiv \overline{(\vec{e}_1;\overrightarrow{OA})} + \overline{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})} \equiv \arg(1+i)+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12} \quad [2\pi]$$

ومنه $$z_B = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}$$

إذن $$z_B = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

2) نحسب المسافة AB .

$$AB = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}-1\right)^2} == \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$$

3) نحدد القياس الرئيسي للزاوية الموجهة : $\widehat{(\vec{e_1},\overrightarrow{AB})}$

$$\left(\vec{e}_1;\overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(z_B-z_A) \equiv \arg\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}-1-i\right) \equiv \arg\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \quad [2\pi]$$

$$\left(\vec{e}_1;\overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg\left(\sqrt{2}\left[\left(-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)+i\left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)\right]\right) \equiv \arg\left(\sqrt{2}\left[-\sin\frac{7\pi}{12}-i\cos\frac{7\pi}{12}\right]\right) \quad [2\pi]$$

$$\left(\vec{e}_1;\overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg\left(\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{12}\right]\right) \equiv \arg\left(\left[\sqrt{2};-\frac{13\pi}{12}\right]\right) \equiv -\frac{13\pi}{12} \equiv \frac{11\pi}{12} \quad [2\pi]$$

إذن القياس الرئيسي لـ $\widehat{(\vec{e_1},\overrightarrow{AB})}$ هو $\frac{11\pi}{12}$

تمرين

نعتبر المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر

وليكن f المعرف على $\mathbb{C}^*$ بـ $f(z) = \frac{\overline{z}+i}{z}$

-1 حدد مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث $|f(z)| = 1$

-2 نضع $z = \cos\theta + i\sin\theta$ حيث $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

أ- مثل النقط $A(i)$ و $B(z)$ و$C(\overline{z})$ و$D(\overline{z}+i)$

ب- تحقق أن $OCDA$ معين و استنتج عمدة $\overline{z}+i$ بدلالة θ ثم عمدة $f(z)$ بدلالة θ

ج- حدد معيار $f(z)$ بدلالة θ

الحل

1- نحدد مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث $\left|f(z)\right|=1$.

ليكن $z\in\mathbb{C}^*$ نضع $z=x+iy$ حيث $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ و $(x;y)\neq(0;0)$

$$\overline{z}+i=x+-iy+i=x+i(1-y)$$

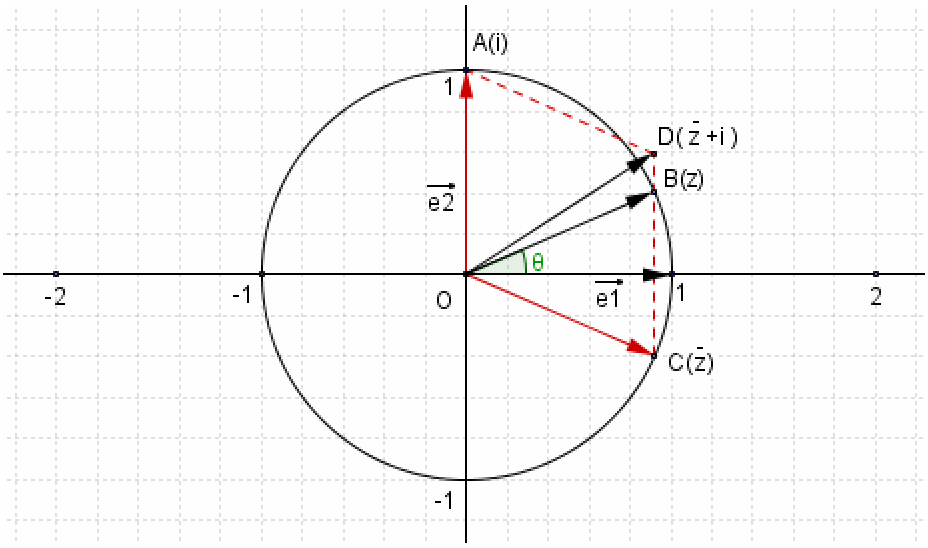
$$\left|f(z)\right|=1\Leftrightarrow\left|\frac{\overline{z}+i}{z}\right|=1\Leftrightarrow\left|\overline{z}+i\right|=\left|z\right|\Leftrightarrow x^2+(1-y)^2=x^2+y^2\Leftrightarrow 2y-1=0$$

إذن مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث $\left|f(z)\right|=1$ هي المستقيم الذي معادلته $y=\frac{1}{2}$

2- نضع $z=\cos\theta+i\sin\theta$ حيث $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

أ- نمثل النقط $A(i)$ و $B(z)$ و$C(\overline{z})$ و$D(\overline{z}+i)$

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ و $B(z)$ و$C(\overline{z})$ متماثلان بالنسبة لمحور الافاصيل



ب- نتحقق أن $OCDA$ معين و نستنتج عمدة $\overline{z}+i$ بدلالة θ ثم عمدة $f(z)$ بدلالة θ

$$OC=\left|\overline{z}\right|=1\quad;\quad OA=\left|i\right|=1\quad;\quad CD=\left|i\right|=1\quad;\quad AD=\left|\overline{z}\right|=1$$

ومنه $OCDA$ معين

(OD) منصف $\left[\widehat{COA}\right]$ و منه: $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}\right)\equiv\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)\quad[2\pi]$

$$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}\right)\equiv\frac{1}{2}\left(\arg(\overline{z})-\arg(i)\right)\quad[2\pi]$$

$$\equiv\frac{1}{2}\left(-\theta-\frac{\pi}{2}\right)\quad[2\pi]$$

$$\arg(\bar{z}+i)\equiv(\vec{e}_1;\overrightarrow{OD})\quad[2\pi]$$
$$\arg(\bar{z}+i)\equiv(\vec{e}_1;\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD})\quad[2\pi]$$
$$\arg(\bar{z}+i)\equiv\arg(i)+\frac{1}{2}\left(-\theta-\frac{\pi}{2}\right)\quad[2\pi]$$
$$\arg(\bar{z}+i)\equiv\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left(-\theta-\frac{\pi}{2}\right)\quad[2\pi]$$
$$\arg(\bar{z}+i)\equiv-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\quad[2\pi]$$

لدينا $\arg(f(z))=\arg\left(\frac{\bar{z}+i}{z}\right)$ و منه $\arg(f(z))\equiv\arg(\bar{z}+i)-\arg(z)\quad[2\pi]$

$$\arg(f(z))\equiv\frac{-\theta}{2}+\frac{\pi}{4}-\theta\quad[2\pi]$$
$$\arg(f(z))\equiv\frac{-3\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\quad[2\pi]$$

ج- نحدد معيار $f(z)$ بدلالة θ

لدينا $z=\cos\theta+i\sin\theta$ ومنه $|z|=1$

و بالتالي $|f(z)|=\left|\frac{\bar{z}+i}{z}\right|=|\bar{z}+i|=\sqrt{\left(\cos^2\theta+(1-\sin\theta)^2\right)}=\sqrt{2-2\sin\theta}$

4 - الإزاحة و التحاكي و الاعداد العقدية

أ/ الازاحة

نعتبر t إزاحة متجهتها $\vec{u}$ حيث $aff(\vec{u})=a$ لتكن $M(z)$ و $M'(z')$

$$t(M)=M'\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$$
$$\Leftrightarrow aff(\overrightarrow{MM'})=aff(\vec{u})$$
$$\Leftrightarrow z'-z=a$$
$$\Leftrightarrow z'=z+a$$

خاصية

التحويل الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوى (P) الى النقطة $M'(z+a)$ من المستوى (P) هو الازاحة التي متجهتها $\vec{u}$ حيث $aff(\vec{u})=a$

ب/ التحاكي

نشاط

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ و $\Omega(\omega)$ نقط من من المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ و k عددا حقيقيا غير منعدم

نربط النقطة $M(z)$ من المستوى بالنقطة $M'(z')$ بالتحويل h حيث $z'-\omega=k(z-\omega)$

1/ حدد النقط الصامدة بـ h

2/ حدد علاقة متجهية بين النقطتين M و M' ثم حدد طبيعة h

الجواب

1/ لتكن $M(z)$

$$h(M)=M\Leftrightarrow z-\omega=k(z-\omega)$$
$$\Leftrightarrow(1-k)z=(1-k)\omega$$

اذا كان $k\neq1$ فان $h(M)=M\Leftrightarrow z=\omega\Leftrightarrow M=\Omega$ أي Ω هي نقطة الوحيدة الصامدة

اذا كان $k=1$ فان $h(M)=M$ $\forall M\in(P)$ أي جميع نقط المستوى صامدة

2/ لتكن $M(z)$ و $M'(z')$

$$h(M)=M' \Leftrightarrow z'-\omega=k(z-\omega)$$
$$\Leftrightarrow aff\left(\overrightarrow{\Omega M'}\right)=k\cdot aff\left(\overrightarrow{\Omega M}\right)$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}=k\cdot\overrightarrow{\Omega M}$$

إذن h تحاكي مركزه Ω و نسبته k

خاصية

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ و $\Omega(\omega)$ نقط من من المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ و k عددا حقيقيا غير منعدم

التحويل الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوى (P) الى النقطة $M'(z')$ من المستوى (P) حيث $z'-\omega=k(z-\omega)$ هو التحاكي الذي مركزه $\Omega(\omega)$ و نسبته k

4- المعادلات من الدرجة الثانية

$$\forall a\in\mathbb{R}^{+*}\qquad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad ; \quad \left(-\sqrt{a}\right)^2=a$$
$$\forall a\in\mathbb{R}^{-*}\qquad \left(i\sqrt{-a}\right)^2=i^2\times -a=a \quad ; \quad \left(-i\sqrt{-a}\right)^2=(-i)^2\times -a=a$$

أ/ الجدر المربع لعدد حقيقي

ليكن a عدد حقيقي غير منعدم

اذا كان a موجبا فان للعدد a جدرين مربعين هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$

اذا كان a سالبا فان للعدد a جدرين مربعين هما $i\sqrt{-a}$ و $-i\sqrt{-a}$

لكل عددين حقيقي جدرين مربعي متقابلين

الجدر مربع صفر هو صفر

أمثلة

الجدران المربعان للعدد 3 هو $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$

الجدران المربعان للعدد -1 هو i و $-i$

الجدران المربعان للعدد -25 هو $5i$ و $-5i$

الجدران المربعان للعدد -3 هو $i\sqrt{3}$ و $-i\sqrt{3}$

ب/ المعادلات من الدرجة الثانية

لتكن a و b و c أعدادا حقيقية بحيث a غير منعدم .

نحل $az^2+bz+c=0\qquad z\in\mathbb{C}$

$$az^2+bz+c=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]\quad \text{حيث}\quad \Delta=b^2-4ac$$

$$az^2+bz+c=0\Leftrightarrow\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$$

إذا كان $\Delta\geq 0$ فان

$$az^2+bz+c=0\Leftrightarrow\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$

ومنه $z=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ أو $z=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

اذا كان $\Delta\prec 0$ فان $-\Delta\succ 0$

$$az^2+bz+c=0\Leftrightarrow\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+i^2\frac{-\Delta}{4a^2}=0$$

$$az^2+bz+c=0\Leftrightarrow\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+i^2\frac{\sqrt{-\Delta}^2}{4a^2}=0$$

$$az^2+bz+c=0\Leftrightarrow\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)=0$$

منه $z=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ أو $z=\frac{-b+-\sqrt{-\Delta}}{2a}$

في كلتا الحالتين يمكن كتابة $z=\frac{-b+d}{2a}$; $z=\frac{-b-d}{2a}$ حيث d جدر مربع للعدد Δ

لتكن a و b و c أعدادا **حقيقية** بحيث a غير منعدم .
العدد $\Delta=b^2-4ac$ يسمى مميز المعادلة $az^2+bz+c=0$
ليكن d جدر مربع للعدد Δ
إذا كان $\Delta\neq 0$ فان للمعادلة $az^2+bz+c=0$ تقبل حلين مختلفين هما $z=\frac{-b+d}{2a}$; $z=\frac{-b-d}{2a}$
إذا كان $\Delta\neq 0$ فان للمعادلة $az^2+bz+c=0$ حل وحيد هو $z=\frac{-b}{2a}$

أمثلة

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية

$$2z^2-\left(2+2\sqrt{2}\right)z+\frac{3}{2}+\sqrt{2}=0 \qquad -2z^2-3z+2=0 \qquad -2z^2+2z+3=0$$

الحل

ليكن Δ مميز المعادلة $2z^2-\left(2+2\sqrt{2}\right)z+\frac{3}{2}+\sqrt{2}=0$

$$\Delta=\left(-\left(2+2\sqrt{2}\right)\right)^2-8\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)=4+8\sqrt{2}+8-12-8\sqrt{2}=0$$

إذن $z=\frac{2+2\sqrt{2}}{4}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ومنه $S=\left\{\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right\}$

ليكن Δ مميز المعادلة $-2z^2-3z+2=0$

$\Delta=9+16=25$

$z=\frac{3+5}{-4}=-2$ أو $z=\frac{3-5}{-4}=\frac{1}{2}$ ومنه $S=\left\{-2;\frac{1}{2}\right\}$

ليكن Δ مميز المعادلة $-2z^2+2z+3=0$

$\Delta=4-12=-8=\left(i2\sqrt{2}\right)^2$

$z=\frac{-2+i2\sqrt{2}}{-4}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ؟أو $z=\frac{-2-i2\sqrt{2}}{-4}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن $S=\left\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

تمرين

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلتين

$$z^2-6z+12=0 \qquad z^2+2\sqrt{3}z+12=0$$

2- أكتب العددين $z_1=3+i\sqrt{3}$ و $z_1=-\sqrt{3}+3i$ في شكلهما المثلثي

3- في المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$، أنشئ $A(z_1)$ و $B(z_2)$ و $E(z_1+z_2)$ ثم حدد طبيعة الرباعي $OAEB$ معللا جوابك

6/ صيغة موافر و تطبيقاتها

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=([1;\alpha])^n=\left[1^n;n\alpha\right]=[1;n\alpha]=\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)$$

أ/خاصية

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha \qquad \forall n\in\mathbb{Z}^* \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

تسمى هذه ب صيغة موافر

ب/ حساب $\cos n\theta$ و$\sin n\theta$ بدلالة $\cos\theta$ و$\sin n\theta$

أنشطة

أنشر $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$

و استنتج أن $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ $\qquad$ $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

الجواب

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3i(\cos^2\theta)\sin\theta - 3(\cos\theta)(\sin^2\theta) - i\sin^3\theta$$

$$= \cos^3\theta - 3(\cos\theta)(\sin^2\theta) + i\left(3(\cos^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta\right)$$

لدينا $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + \sin 3\theta$

ومنه $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3(\cos\theta)(\sin^2\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

و $\sin 3\theta = 3(\cos^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta(1-\sin^2\theta) - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

تمرين

أحسب $\cos x$ على شكل حدودية بـ $\cos x$ درجتها 5

* لتكن $A(z_A) \neq B(z_B)$ و $D(z_D) \neq C(z_C)$ من المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$

7- الترميز الاسية و تطبيقاته مثلثة

أ/ الكتابة $e^{i\theta}$

نرمز بالرمز $e^{i\theta}$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$، لكل عدد عقدي معياره 1 و عمدته θ أي

$$e^{i\theta} = [1;\theta] = \cos\theta + i\sin\theta$$

أمثلة

$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ $\qquad$ $e^0 = 1$ $\qquad$ $e^{i\pi} = -1$ $\qquad$ $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ب/خاصية أساسية

لكل عددين عقديين θ و θ' $\qquad$ $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

ج/ الكتابة الاسية لعدد عقدي غير منعدم

لكل عدد عقدي غير منعدم z معياره r و عمدته: $\qquad$ $z = [r,\alpha] = re^{i\alpha}\ \theta$

الحساب باستعمال الترميز الاسي

ليكن z و z' عددين عقديين بحيث $z = re^{i\theta}$ و $z = r'e^{i\theta'}$ حيث $r \succ 0$ و $r' \succ 0$

$z \times z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ $\qquad$ $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ $\qquad$ $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$ $\qquad$ $z = r^n e^{in\theta}$

أمثلة

باستعمال الترميز الاسي حدد معيار و عمدة كل من الاعداد العقدية التالية.

$z_2 = (1 - i\sqrt{3})^4$ $\qquad$ $z_1 = \frac{2i(1-i)}{3+3i\sqrt{3}}$

* لدينا $3 + 3i\sqrt{3} = 6\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\qquad$ $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ $\qquad$ $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$z_1 = \frac{2i(1-i)}{3+3i\sqrt{3}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{6e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

* لدينا $1-i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $z_2=\left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^4=16e^{-i\frac{4\pi}{3}}$

د/ صيغتا اولير و تطبيقاته

لكل عدد عقدي θ

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \qquad e^{i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$$

و منه $2i\sin\alpha=e^{i\theta}-e^{-i\theta}$ $\qquad 2\cos\alpha=e^{i\theta}+e^{-i\theta}$

لكل عدد عقدي θ

$$\sin\alpha=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \qquad \cos\alpha=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

و نسمي الصيغتين بصيغتي أولير

تطبيق: اخطاط حدودية مثلثية

اخطاط حدودية مثلثية هو تحويل الجداءات التي على شكل $\cos^n\theta$ أو $\sin^n\theta$ أو $\cos^n\theta\times\sin^m\theta$
الى مجموع حدود من شكل $a\cos\alpha\theta+b\sin\alpha\theta$

مثال نخطط $\cos^4\theta$

$$\cos^4\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4$$

$$\cos^4\theta=\frac{1}{16}\left(e^{i4\theta}+4e^{i3\theta}\cdot e^{-i\theta}+6e^{i2\theta}\cdot e^{-i2\theta}+4e^{i\theta}\cdot e^{-i3\theta}+e^{-i4\theta}\right)$$

$$\cos^4\theta=\frac{1}{16}\left(e^{i4\theta}+e^{-i4\theta}+4\left(e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}\right)+6\right)$$

$$\cos^4\theta=\frac{1}{8}\times\frac{e^{i4\theta}+e^{-i4\theta}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2}+\frac{3}{8}$$

$$\cos^4\theta=\frac{1}{8}\cos 4\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{8}$$

تمرين أخطط $\sin^4\theta\times\cos^3\theta$

ذ-الدوران و الاعداد العقدية

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ و $\Omega(\omega)$ نقط من من المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر$(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ و α عددا حقيقيا $\qquad [1;\alpha]=(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

نربط النقطة $M(z)$ من المستوى بالنقطة $M'(z')$ بالتحويل r حيث $z'-\omega=[1;\alpha](z-\omega)$

نحدد علاقة متجهية بين النقطتين M و M' ثم نحدد طبيعة r

نلاحظ أن $r(\Omega)=\Omega$

لتكن $M(z)=\Omega(\omega)$ و $M'(z')$

$$r(M)=M' \Leftrightarrow z'-\omega=[1;\alpha](z-\omega)$$
$$\Leftrightarrow \frac{z'-\omega}{z-\omega}=[1;\alpha]$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right|=1 \\ \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right)\equiv\alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\Omega M'}{\Omega M}=1 \\ \left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M'=\Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

إذن r الدوران الذي مركزه Ω و زاويته α

خاصية

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ و $\Omega(\omega)$ نقط من من المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ و α عددا حقيقيا غير منعدم
التحويل الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوى (P) الى النقطة $M'(z')$ من المستوى (P)
حيث $z'-\omega=[1;\alpha](z-\omega)$ هو الدوران الذي مركزه Ω و زاويته α
$[1;\alpha]=(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

الدوران باستعمال الكتابة الاسية

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ و $\Omega(\omega)$ نقط من من المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ و α عددا حقيقيا غير منعدم
التحويل الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوى (P) الى النقطة $M'(z')$ من المستوى (P)
حيث $z'-\omega=e^{i\alpha}(z-\omega)$ هو الدوران الذي مركزه Ω و زاويته α